T°ES/LSPÉ	SÉANCE DU MARDI 31 MARS 2020

Aujourd'hui on passe à la pratique sur l'intégration et les primitives.
J'essaierai d'être le plus clair possible dans les corrections, mais n'hésitez pas à m'écrire s'il y a une question ou un doute sur ma correction : mathemathieu@free.fr.

I. Exercice 28 p192 (recherche de primitives)

Dans le cours, on a vu la formule $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ (où F est une primitive de f).

Il va donc falloir s'entraîner à trouver des primitives avant de pouvoir appliquer avec joie cette formule !
Let's go…

Correction :

$f(x) = \dots$	Une primitive :
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

a) Une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est : $\mathrm{F}(x) = \ln(x)$.

Rédaction : c'est du cours ! En effet, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) Une primitive de $f(x) = \frac{3}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est : $\mathrm{F}(x) = -\frac{3}{x}$.

Rédaction : $f(x) = 3 \times \frac{1}{x^2} = 3x^{-2}$. Or, une primitive de x^{-2} est $\frac{1}{-2+1} \times x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$.

Donc une primitive de $3x^{-2}$ est $3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$.

c) Une primitive de $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$ est : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2x^2}$.

Rédaction : $f(x) = -x^{-3}$. Or, une primitive de x^{-3} est $\frac{1}{-3+1} \times x^{-3+1} = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2}$.

Donc une primitive de $-x^{-3}$ est $-\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}$.

d) Une primitive de $f(x) = \frac{1}{2x^4}$ sur $]0;+\infty[$ est : $\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{6x^3}$.

Rédaction : $f(x) = \frac{1}{2} x^{-4}$. Or, une primitive de x^{-4} est $\frac{1}{-4+1} \times x^{-4+1} = -\frac{1}{3} x^{-3} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{3x^3}$.

Donc une primitive de $\frac{1}{2} x^{-4}$ est $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{1}{6x^3}$.

→

e) Une primitive de $f(x)=\dfrac{-7}{3x^5}$ sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=\dfrac{7}{12x^4}$.

Rédaction : $f(x)=-\dfrac{7}{3}x^{-5}$. Or, une primitive de x^{-5} est $\dfrac{1}{-5+1}\times x^{-5+1}=-\dfrac{1}{4}x^{-4}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{x^4}=-\dfrac{1}{4x^4}$.

Donc une primitive de $-\dfrac{7}{3}x^{-5}$ est $-\dfrac{7}{3}\times\left(-\dfrac{1}{4x^4}\right)=\dfrac{7}{12x^4}$.

f) Une primitive de $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Rédaction : $f(x)=1-x^{-2}$.

Or, une primitive de 1 est x et une primitive de x^{-2} est $\dfrac{1}{-2+1}\times x^{-2+1}=-x^{-1}=-\dfrac{1}{x}$.

Donc une primitive de $1-x^{-2}$ est $x-\left(-\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x}$.

g) Une primitive de $f(x)=x-\dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{3x^3}$.

Rédaction : $f(x)=x-5x^{-4}$.

Or, une primitive de x est $\dfrac{1}{2}x^2$ et une primitive de $5x^{-4}$ est $5\times\dfrac{1}{-4+1}\times x^{-4+1}=-\dfrac{5}{3}x^{-3}=-\dfrac{5}{3x^3}$.

Donc une primitive de $x-5x^{-4}$ est $\dfrac{1}{2}x^2-\left(-\dfrac{5}{3x^3}\right)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{3x^3}$

h) Une primitive de $f(x)=e^x-\dfrac{5}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=e^x-5\ln x$.

Rédaction : $f(x)=e^x-5\times\dfrac{1}{x}$.

Or, une primitive de e^x est e^x et une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$.

Donc une primitive de $e^x-5\times\dfrac{1}{x}$ est $e^x-5\ln x$.

i) Une primitive de $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^x$ sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=-\dfrac{1}{2}e^x$.

Rédaction : Une primitive de e^x est e^x d'où le résultat.

→

II. LA primitive qui…

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x-1+\dfrac{2}{x^2}$.

Déterminer la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Correction :

- Une primitive de $3x$ est $3\times\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{3}{2}x^2$.
- Une primitive de -1 est $-x$.
- Une primitive de $\dfrac{2}{x^2}$ est $-\dfrac{2}{x}$. En effet, $\dfrac{2}{x^2}=2x^{-2}$ donc une primitive est $2\times\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-2x^{-1}=-\dfrac{2}{x}$.
- $f(x)=3x-1+\dfrac{2}{x^2}$ donc $\mathrm{F}(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x-\dfrac{2}{x}+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

Or, $\mathrm{F}(1)=0$ donc $\dfrac{3}{2}-1-2+k=0$

donc $k=\dfrac{3}{2}$.

Alors : $\mathrm{F}(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2}$.

> PROPRIÉTÉ.
>
> Si F et G sont deux primitives de f, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :
>
> $$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k.$$

III. Premières intégrales

À l'aide des primitives calculées à l'exercice précédent, calculer :

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_5^{10} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{-5}^{-3} -\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

une primitive

Rappel : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{F}(x)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Correction :

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln x]_1^8=\ln 8-\ln 1=\ln 8$

b) $\displaystyle\int_5^{10} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-3}{x}\right]_5^{10}=\frac{-3}{10}-\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{-3}{10}+\left(\frac{6}{10}\right)=\frac{3}{10}$

c) $\displaystyle\int_{-5}^{-3} -\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2x^2}\right]_{-5}^{-3}=\frac{1}{2\times(-3)^2}-\frac{1}{2\times(-5)^2}=\frac{1}{18}-\frac{1}{50}=\frac{50-18}{18\times 50}=\frac{32}{18\times 50}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times3\times3\times5\times2\times5}=\frac{8}{225}$

IV. Calculatrice

Pour terminer, vous allez apprendre à utiliser votre calculatrice pour calculer une intégrale.

Au choix, ou les deux :

- regardez cette première vidéo (≈ 2 min) puis celle-ci (< 4 min)
- savoir-faire 2 page 179 du manuel

Vérifiez de la façon qui vous convient le mieux les résultats obtenus au III. Vérifiez bien que vous obtenez les mêmes résultats : savoir vérifier de tels calculs à la calculatrice est essentiel !

À la prochaine :)