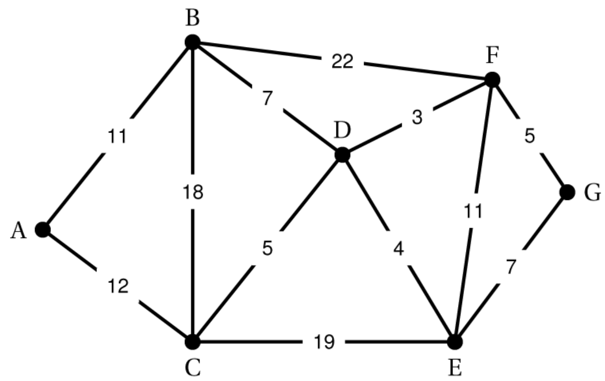
T°ES spé maths	SÉANCE DU LUNDI 30 MARS 2020

I. Exercice Bac : Antilles-Guyane, 19 juin 2018 (partie B)

Franck joue en ligne sur internet.

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes.
Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.
Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. **a.** Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

   b. Donner un tel chemin.

2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
   Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?

3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.
   Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

Correction :

1. **a.** Effectuer un parcours qui part d'une salle pour y revenir et qui passe une et une seule fois par chaque couloir, c'est chercher si ce graphe est un cycle eulérien.
   Le graphe est connexe car deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	4	4	4	4	2

   Tous les sommets sont de degré pair donc d'après le théorème d'Euler, il existe donc un cycle eulérien.
   On peut donc partir de n'importe quel sommet et y revenir en passant une et une seule fois par tous les couloirs.

   b. Un exemple de chemin : A → B → F → G → E → F → D → E → C → D → B → C → A.

2. Effectuer un tel parcours c'est chercher s'il existe une chaîne eulérienne de A vers G.
Pour avoir une telle chaîne, il faudrait que les sommets A et G soient les seuls de degré impair ; ce n'est pas le cas ; on ne peut donc pas aller de A à G en parcourant tous les couloirs.

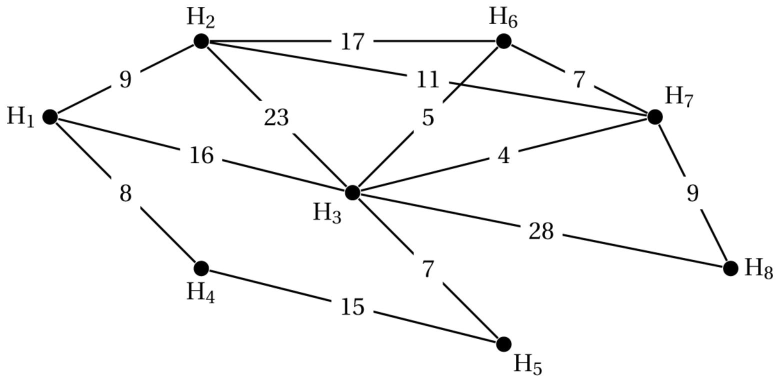
3. En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

G	F	E	D	C	B	A	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	G
	5 (G)	7 (G)	∞	∞	∞	∞	F (G)
		7 (G) ~~16 (F)~~	8 (F)	∞	27 (F)	∞	E (G)
			8 (F) ~~11 (E)~~	26 (E)	27 (F)	∞	D (F)
				~~26 (E)~~ 13 (D)	~~27 (F)~~ 15 (D)	∞	C (D)
					15 (D) ~~31 (C)~~	25 (C)	B (D)
						25 (C)	A (C)

Le chemin le plus court sera : G $\xrightarrow{5}$ F $\xrightarrow{3}$ D $\xrightarrow{5}$ C $\xrightarrow{12}$ A et aura pour longueur 25.

II. Exercice Bac : Liban, 31 mai 2019 (partie B)

Pour le dîner, un restaurateur décide de proposer des livraisons à domicile. Il fait un essai avec huit clients.
Sur le graphe ci-contre, les sommets représentent les différents lieux d'habitation de ces huit clients. Les arêtes représentent les rues et les valeurs indiquent les durées moyennes des trajets exprimées en minutes.



1. Répondre aux questions suivantes en justifiant.

a) Existe-t-il un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois ?

b) Un tel parcours peut-il partir de H_1 et y revenir ?

2. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le temps minimal pour aller de H_4 vers H_8.
Préciser le trajet correspondant.

Correction :

1. Le tableau suivant donne les degrés des différents sommets :

Sommet	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
Degré	3	4	6	2	2	3	4	2

a. Deux sommets sont de degré impair, les sommets H_1 et H_6. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne. Il existe un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois.

b. Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair). Donc ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

2. Algorithme de Dijsktra :

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
$8\ (H_4)$	∞	∞	0	$15\ (H_4)$	∞	∞	∞
	$17\ (H_1)$	$24\ (H_1)$		$15\ (H_4)$	∞	∞	∞
	$17\ (H_1)$	$\cancel{24\ (H_1)}$ $22\ (H_5)$			∞	∞	∞
		$22\ (H_5)$ $\cancel{40\ (H_2)}$			$34\ (H_2)$	∞	∞
					$\cancel{34\ (H_2}$ $27\ (H_3)$	$26\ (H_3)$	$50\ (H_3)$
					$27\ (H_3)$ $\cancel{33\ (H_7)}$		$35\ (H_7)$ $\cancel{50\ (H_3)}$
							$35\ (H_7)$ $\cancel{36\ (H_6)}$

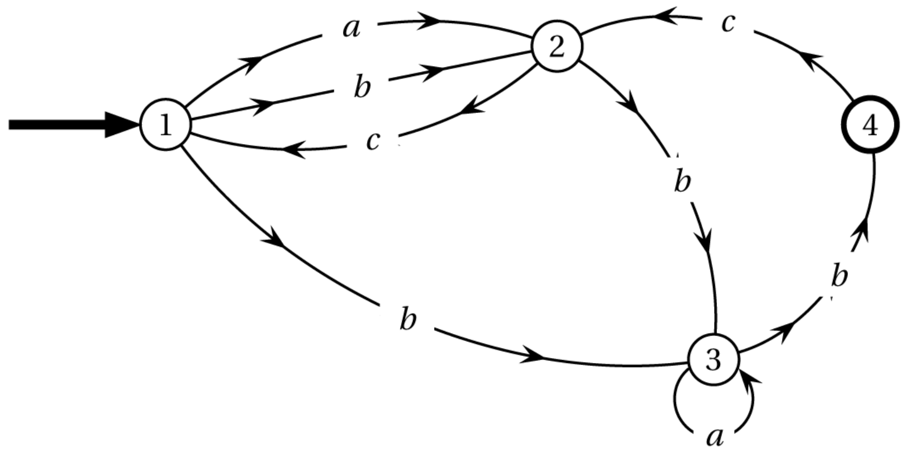
Le trajet le plus court de H_4 à H_8 est de longueur 35 : $H_4 \xrightarrow{15} H_5 \xrightarrow{7} H_3 \xrightarrow{4} H_7 \xrightarrow{9} H_8$.

III. Exercice Bac : Amérique du Nord, 28 mai 2019

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à un local d'une petite entreprise, les employés doivent choisir un code reconnu par l'automate suivant :



Une succession de lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4.
Par exemple :

- le mot *bcbab* est un mot reconnu par cet automate, et correspond au chemin 121334 ;
- le mot *abac* n'est pas reconnu par cet automate.

1. Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par cet automate ?

$$abab,\ abc,\ abbcbb.$$

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ associée au graphe orienté dans laquelle les sommets sont rangés dans l'ordre croissant.

3. Un logiciel de calcul formel donne

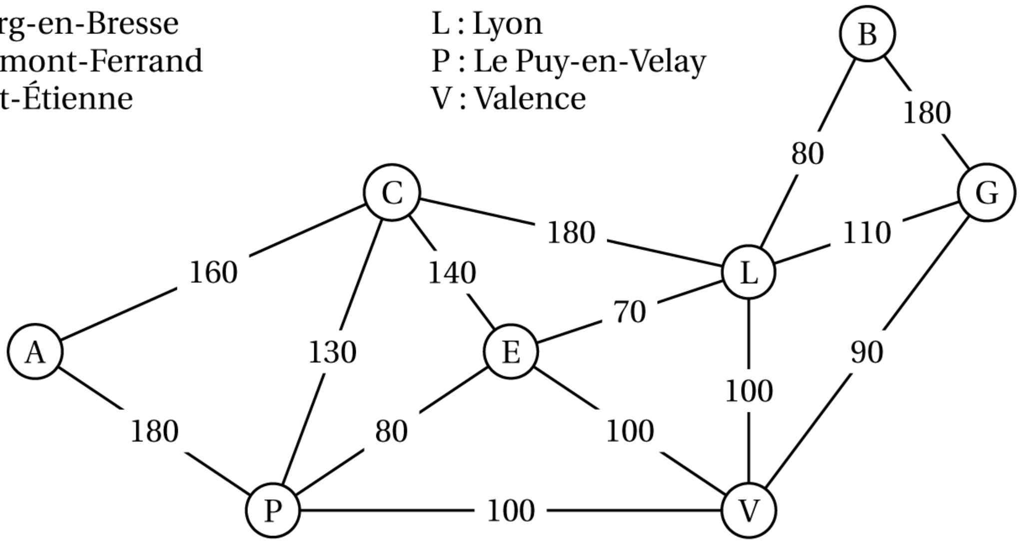
$$M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^5 = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 18 & 10 \\ 6 & 6 & 14 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien de mots de 4 lettres sont-ils reconnus par l'automate ? Justifier. Quels sont-ils ?

Partie B

Dans le graphe ci-après, on a fait figurer les distances routières, exprimées en kilomètre, entre certaines grandes villes de la région Auvergne-Rhône-Alpes.

A : Aurillac
B : Bourg-en-Bresse
C : Clermont-Ferrand
E : Saint-Étienne
G : Grenoble
L : Lyon
P : Le Puy-en-Velay
V : Valence



1. Un technicien doit vérifier l'état des routes du réseau représenté par le graphe ci-dessus.

a. Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en empruntant chaque route une et une seule fois ? Justifier la réponse.

b. Si un tel parcours est possible, préciser par quelle(s) ville(s) de ce réseau routier le technicien doit commencer sa vérification.

2. Ayant terminé sa semaine de travail à Bourg-en-Bresse, le technicien souhaite retourner chez lui à Aurillac en faisant le moins de kilomètres possibles.

a. Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le plus court chemin entre les villes de Bourg-en-Bresse et Aurillac en empruntant le réseau routier.

b. La route entre Le Puy-en-Velay et Aurillac est fermée à la circulation. Quel chemin doit-il alors emprunter ?

Correction :

Partie A

1. Le mot *abab* est reconnu par cet automate. Il correspond au chemin $1 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$.

Le mot *abc* n'est pas reconnu par cet automate.

Le mot *abbcbb* est reconnu par cet automate. C'est le chemin $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 3 \to 4$.

2. La matrice M est $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Pour trouver le nombre de chemins de longueur 4 reliant deux sommets, il faut connaître les coefficient de la matrice M^4. On lit dans cette matrice que $M^4_{(1,4)} = 5$. Donc il ya 5 chemins de longueur 4 reliant les commets 1 et 4.

Le chemin $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4$ donne le mot *abab*
Le chemin $1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4$ donne le mot *bbab*
Le chemin $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4$ donne le mot *acbb*
Le chemin $1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{c} 1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4$ donne le mot *bcbb*
Le chemin $1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4$ donne le mot *baab*

Partie B

1. a. Le tableau suivants donne les degrés des différents sommets :

Sommet	A	B	C	E	G	L	P	V
Degré	2	2	4	4	3	5	4	4

Deux sommets sont de degrés impairs, donc d'après d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne permettant de parcourir l'ensemble du réseau en empruntant chaque route une et une seule fois.

b. Le technicien doit commencer par un sommet de degré impair, c'est-à-dire par Grenoble ou Lyon.

2. a. Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de B vers A, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	E	G	L	P	V	Sommet choisi
∞	0	∞	∞	180 (B)	80 (B)	∞	∞	L(80)
∞		260 (L)	150 (L)	180 (B) ~~190 (L)~~		∞	180 (L)	E(150)
∞		~~290(E)~~ 260 (L)		180 (B)		230 (E)	~~250 (L)~~ 180 (L)	G (180)
∞		260 (L)				230 (E)	~~270 (G)~~ 180 (L)	V (180)
∞		260 (L)				~~280 (V)~~ 230 (E)		P (230)
410 (P)		~~360 (P)~~ 260 (L)						C (260)
~~420 (C)~~ 410 (P)		~~360 (P)~~						A (410)

Le trajet le plus court de B à A est de longueur 410 : $B \xrightarrow{80} L \xrightarrow{70} E \xrightarrow{80} P \xrightarrow{180} A$.

b. Si la route entre Le-Puy-en-Velay et Aurillac est fermée à la circulation, d'après l'algorithme précédent, le chemin le plus court est de longueur 420 : c'est $B \xrightarrow{80} L \xrightarrow{180} C \xrightarrow{160} A$.