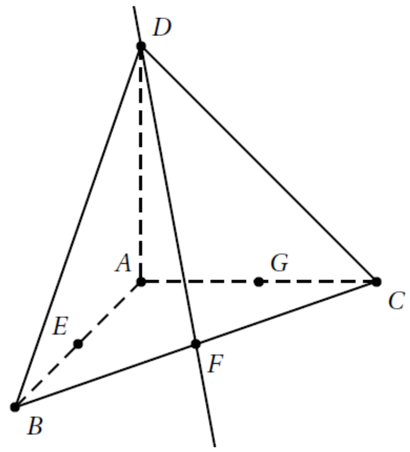
T°S — SÉANCE DU MARDI 24 MARS 2020

I. Exercice 8 (fiche)

Éléments de correction tirés de l'APMEP (rédaction à parfaire) :

1.



Commençons par des coordonnées « évidentes », puisque liées au repère :
$A(0\,;\,0\,;\,0)$; $B(1\,;\,0\,;\,0)$; $C(0\,;\,1\,;\,0)$ et $D(0\,;\,0\,;\,1)$.
Puisque F est le milieu de $[BC]$, on en déduit que ses coordonnées sont la moyenne de celles des points B et C, donc $F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

2.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ sont donc : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\end{pmatrix}$.

Si on appelle M_t le point de paramètre t sur la droite (DF), défini tel que $\overrightarrow{DM_t} = t\,\overrightarrow{DF}$, alors la représentation paramétrique de la droite (DF) est donnée par : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}t \\ y &=& \frac{1}{2}t \\ z &=& 1-t \end{array}\right.\quad t \in \mathbf{R}$.

3.

Le point H est un point de (DF), mais c'est aussi un point de $\mathscr{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, qui vérifie également l'équation du plan :

$$\begin{aligned} M_t \in \mathscr{P} &\iff \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - 2(1-t) = 0 \\ &\iff 3t - 2 = 0 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le point de paramètre t sur la droite (DF) est sur le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le paramètre t est $\frac{2}{3}$, ce qui nous indique que le point H est le point de coordonnées : $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\,1-\frac{2}{3}\right)$, c'est-à-dire : $H\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$

4. On n'a pas encore traité le chapitre sur le produit scalaire (dans l'espace), qui nous permettrait de démontrer rapidement que $\overrightarrow{\mathrm{HE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}=0$ et donc que $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est droit.

On peut donc calculer EH^2, EG^2 et HG^2 puis montrer que $\mathrm{EG}^2=\mathrm{EH}^2+\mathrm{HG}^2$ et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour conclure que le triangle EHG est rectangle en H, donc que $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est droit.

II. Exercice 9 (fiche)

Correction :

• On notera $S_{[AB]}$ la sphère de diamètre [AB].

$S_{[AB]}$ a pour rayon $\dfrac{AB}{2}$ *ie* $\dfrac{\sqrt{(-2-1)^2+(1-(-1))^2+(1-2)^2}}{2}$ *ie* $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Remarque : $\dfrac{\sqrt{14}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}\times 2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

Elle a pour centre le point I, milieu de [AB], de coordonnées $\left(\dfrac{1-2}{2};\dfrac{-1+1}{2};\dfrac{2+1}{2}\right)$ *ie* $\left(-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{3}{2}\right)$.

$S_{[AB]}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\mathrm{IM}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{IM}=\frac{\sqrt{14}}{2} &\Leftrightarrow \mathrm{IM}^2=\frac{14}{4}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{IM}^2=\frac{7}{2}\\
&\Leftrightarrow \left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+(y-0)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}\\
&\Leftrightarrow \dots\\
&\Leftrightarrow x^2+x+y^2+z^2-3z=1 \quad \text{(\underline{équation cartésienne de la sphère})}
\end{aligned}$$

• On trouve facilement (à faire) une représentation paramétrique de la droite (CD) : $\begin{cases} x=1-2t\\ y=2t\\ z=-1+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Remarque : j'ai ici utilisé le point C *et le vecteur directeur* $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

$$\begin{aligned}
\bullet\ M(x;y;z)\in S_{[AB]} &\Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=1-2t\\ y=2t\\ z=-1+4t\end{cases} \text{ et } x^2+x+y^2+z^2-3z=1\\
&\Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R},\ (1-2t)^2+1-2t+(2t)^2+(-1+4t)^2-3(-1+4t)=1\\
&\Leftrightarrow \dots\\
&\Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R},\ 24t^2-26t+5=0
\end{aligned}$$

On résout cette équation de degré 2, et on trouve deux solutions : $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{5}{6}$.

La droite (CD) et la sphère $S_{[AB]}$ ont donc deux points d'intersection :

$$t=\frac{1}{4} \text{ donne } \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \ ;\ t=\frac{5}{6} \text{ donne } \left(-\frac{2}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right).$$