I. 107 p155 : taux global et taux moyen

a) On note t le taux d'évolution global cherché :

$$1+t=\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{7}{100}\right)\left(1-\frac{8}{100}\right)$$
$$t=0{,}9\times0{,}93\times0{,}92-1$$
$$t=-0{,}22996$$

Le taux d'évolution global sur la période 2009-2011 est donc de $-22{,}996\%$.

b) On note t_m le taux d'évolution moyen en pourcentage : $\left(1-\frac{t}{100}\right)^3=0{,}9\times0{,}93\times0{,}92$

donc $\left(1-\frac{t}{100}\right)^3=0{,}77004$.

c) $\left(1-\frac{t}{100}\right)^3=0{,}77004 \Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=0{,}77004^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{t}{100}=1-0{,}77004^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow t=100\left(1-0{,}77004^{\frac{1}{3}}\right)$

soit $t \approx 8{,}3418$

Le taux (annuel) moyen est donc d'environ 8,34 %.

Remarque : on pourrait, maintenant qu'on a vu le chapitre sur les exponentielles et la fonction ln, faire autrement.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{t}{100}\right)^3=0{,}77004 &\Leftrightarrow \ln\left(\left(1-\frac{t}{100}\right)^3\right)=\ln(0{,}77004)\\ &\Leftrightarrow 3\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\ln(0{,}77004)\\ &\Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{\ln(0{,}77004)}{3}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=e^{\frac{\ln(0{,}77004)}{3}}\\ &\Leftrightarrow 1-e^{\frac{\ln(0{,}77004)}{3}}=\frac{t}{100}\\ &\Leftrightarrow 100\left(1-e^{\frac{\ln(0{,}77004)}{3}}\right)=t\end{aligned}$$

et on retrouve $t \approx 8{,}3418$.

d) $150000\left(1-\frac{t}{100}\right)^4=150000\times0{,}77004^{\frac{1}{3}} \approx 105\,871$ €.

II. 127 p160 : QCM

1. => réponse A

k est la composée de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc k est dérivable sur $]0;+\infty[$.

En posant $u(x)=1+\ln x$, on a $k=\mathrm{e}^u$ et donc $k'=u'\mathrm{e}^u$.

$$u'(x)=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x} \qquad\qquad k'(x)=\frac{1}{x}\times\mathrm{e}^{1+\ln x}$$

$x\in\ ]0;+\infty[$ donc $x>0$ et donc $k'(x)>0$, donc k est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2. => réponse B

L'inéquation $\ln(1-x)>0$ est définie lorsque $1-x>0$, c'est-à-dire lorsque $x<1$.

Pour tout réel $x\in\ ]-\infty;1[$:

$$\begin{aligned}\ln(1-x)>0 &\Leftrightarrow \ln(1-x)>\ln 1\\ &\Leftrightarrow 1-x>1\\ &\Leftrightarrow 1-1>x\\ &\Leftrightarrow 0>x\end{aligned}$$

Donc les solutions sont les réels x tels que $x<1$ <u>et</u> $0>x$, autrement dit tels que $x<0$.

3. => réponse A

$\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}=\mathrm{e}^{\ln a}\times\mathrm{e}^{\ln b}=a\times b=ab$

4. => réponse A

$\ln(3a)-\ln a=\ln\left(\frac{3a}{a}\right)=\ln 3$

5. => réponses B et C

<u>Réponse B</u> : vérification à la calculatrice

<u>Réponse C</u> : $1+\ln(\mathrm{e}+1)=\ln(\mathrm{e})+\ln(\mathrm{e}+1)=\ln(\mathrm{e}(\mathrm{e}+1))=\ln(\mathrm{e}^2+\mathrm{e})$

<u>Réponse A fausse</u> : si la réponse A était vraie, on aurait $\ln(\mathrm{e}^2+\mathrm{e})=\ln(\mathrm{e}^2)+\ln\mathrm{e}$

$\ln(\mathrm{e}^2+\mathrm{e})=3$

$\mathrm{e}^2+\mathrm{e}=\mathrm{e}^3$.

Or, $\mathrm{e}^3=\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}$ donc $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}=\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}$ donc $\mathrm{e}=\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$ donc $\mathrm{e}=\mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1)$ donc $1=\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$.

Or ceci est impossible, puisque $\mathrm{e}-1<0$ et $\mathrm{e}>0$, donc $\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)<0$ …

6. => réponse B

Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=\mathrm{e}^{-(n+1)\ln 2}=\mathrm{e}^{-n\ln 2-\ln 2}=\mathrm{e}^{-n\ln 2}\times\mathrm{e}^{-\ln 2}=u_n\times\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=u_n\times\frac{1}{2}$ donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

III. Exercice 1 Antilles-Guyane, septembre 2019

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. L'équation $\ln 5+\ln(x+1)=1$ a pour solution :

- **a.** $x=\mathrm{e}-6$
- **b.** $x=-1$
- **c.** $x=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}-1$
- **d.** $x=-0{,}5$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=2\ln(x)-x$. Le nombre $f'(2)$ est égal à :

- **a.** -1
- **b.** 0
- **c.** $2\ln 2-2$
- **d.** $2\ln 2-1$

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n>175$ est :

- **a.** $n=\ln\left(\dfrac{175}{2}\right)$
- **b.** $n=7$
- **c.** $n=8$
- **d.** $n=\ln 175-\ln 2$

Correction :

1. L'équation $\ln 5+\ln(x+1)=1$ a pour solution :

a. $x=\mathrm{e}-6$ **b.** $x=-1$ **c.** $\boxed{x=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}-1}$ **d.** $x=-0{,}5$

$$\ln 5+\ln(x+1)=1 \iff \ln(5(x+1))=\ln \mathrm{e} \iff 5(x+1)=\mathrm{e} \iff 5x+5=\mathrm{e} \iff x=\frac{1}{5}\mathrm{e}-1$$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=2\ln(x)-x$. Le nombre $f'(2)$ est égal à :

a. -1 **b.** $\boxed{0}$ **c.** $2\ln 2-2$ **d.** $2\ln 2-1$

$f(x)=2\ln(x)-x$ donc $f'(x)=2\dfrac{1}{x}-1$ donc $f'(2)=\dfrac{2}{2}-1=0$

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n>175$ est :

a. $n=\ln\left(\dfrac{175}{2}\right)$ **b.** $n=7$ **c.** $\boxed{n=8}$ **d.** $n=\ln 175-\ln 2$

$$2^n>175 \iff \ln\left(2^n\right)>\ln 175 \iff n\ln 2>\ln 175$$

$$\iff n>\frac{\ln 175}{\ln 2} \quad (\text{car } \ln 2>0 \text{ puisque } 2>1)$$

et $\dfrac{\ln 175}{\ln 2}\approx 7{,}45$, d'où le résultat

IV. Exercice 4 Liban, mai 2018

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par

$$f(x) = \frac{x+2-\ln(x)}{x}.$$

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$.
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,25]$,

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}.$$

b. Résoudre dans $[1\,;\,25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$.

d. Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

e. Déterminer un encadrement d'amplitude $0{,}01$ de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Correction :

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

a. On admet que f est dérivable sur $[1\,;25]$. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;25]$:
$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x+2-\ln(x)$ et $v(x) = x$.
En écrivant $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$,

$$f'(x) = \frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x - (x+2-\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{x-1-x-2+\ln(x)}{x^2} = \frac{-3+\ln(x)}{x^2}$$

b. Sur $[1\,;25]$, on a $-3+\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) > 3 \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^3$ donc $x \in [\mathrm{e}^3\,;25]$

c. Pour tout $x \in [1\,;25]$, $f'(x)$ a le même signe que $-3+\ln(x)$.
$f(\mathrm{e}^3) = \dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3} \approx 0{,}950$ et $f(25) = \dfrac{27-\ln(25)}{25} \approx 0{,}951$.
Donc le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;25]$ est :

x	1		e^3		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}$	$\nearrow$	$\dfrac{27-\ln(25)}{25}$

d. Sur l'intervalle $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Or $1{,}5 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}\,;3\right]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$.
Sur l'intervalle $[\mathrm{e}^3\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ n'admet aucune solution car
$1{,}5 \notin \left[\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}\,;\dfrac{27-\ln(25)}{25}\right]$.
Donc dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution.

e. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \in]2{,}31\,;2{,}32[$

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

a. D'après la question **1. c**, le coût minimal est obtenu pour $x = \mathrm{e}^3$ centaines de pièces, soit pour environ 2 009 pièces.
Ce coût minimal sera de $\dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}$ soit environ 0,950 euro.

b. D'après la question **1. d**, le nombre minimal de pièces à fabriquer sera de 2,32 centaines de pièces, soit environ 232 pièces.

c. Il sera impossible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes (0,50 euro), car sur l'intervalle $[1\,;25]$ (de 1 à 2 500 pièces), $f(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^3-1}{\mathrm{e}^3}$ soit un coût minimal d'environ 0,95 euro.