SÉANCE DU JEUDI 19 MARS 2020

I. 91 p221 : suite récurrente

1. Pour tout réel $x>1$, $2x-1>0$.

Donc, pour tout réel $x>1$: $f(x)>1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1}>1 \Leftrightarrow x^2>2x-1$ (car $2x-1>0$)

$\Leftrightarrow x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0$

Or ceci est vrai pour $x>1$, donc on a bien $\boldsymbol{f(x)>1}$.

<u>Autre méthode, un peu plus longue</u> : démontrer que f est dérivable, obtenir $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$.

En déduire que $f'(x)>0$ sur $]1;+\infty[$, donc que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
Or, $f(1)=1$, d'où $f(x)>1$ sur $]1;+\infty[$.

2. Par récurrence, déjà fait au chapitre sur la récurrence. Je ne donne ici que les étapes pour l'hérédité :
« Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u_n>1$.
Alors, comme f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$:
$f(u_n)>f(1)$ *ie* $u_{n+1}>1$. »

3. a) $u_n>1$ donc $u_n\neq 0$ donc (v_n) est <u>bien définie</u>.
$u_n>1$ donc $v_n>0$ donc (w_n) est <u>bien définie</u>.

b) $$w_{n+1}=\ln(v_{n+1})=\ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{u_n^2}{2u_n-1}-1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$$

$$\ldots=\ln\left(\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}\right)=\ln\left(\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2\right)=2\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)=2\ln(v_n)=2w_n$$

donc (w_n) est **géométrique de raison 2**.

c) • $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=\frac{1}{2}$ et $w_0=\ln(v_0)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ • $w_n=w_0\times 2^n$ *ie* $\boldsymbol{w_n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^n}$.

• $w_n=\ln(v_n)$ donc $v_n=\mathrm{e}^{w_n}=\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^n}=\left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{2^n}$ *ie* $\boldsymbol{v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

• $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ donc $v_nu_n=u_n-1$ donc $u_n=\frac{1}{1-v_n}$. Alors : $\boldsymbol{u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ (car $2>1$) et $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^N=0$ (car $-1<\frac{1}{2}<1$)

donc par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}=0$. Par somme et quotient de limites : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1}$.

II. 149 p233 : réciproque de la fonction sinus hyperbolique

Lors du chapitre sur la fonction exponentielle, nous avons rencontré (au détour de l'exercice 72 p185) la fonction sinus hyperbolique, définie par $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Nous avions alors observé (et démontré) que cette fonction suivait des formules ressemblantes à celles suivies par les fonctions trigonométriques, par exemple : $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$, très ressemblante à $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$.

Dans cet exercice, nous allons étudier la fonction réciproque de la fonction sh, notée Argsh ou sh^{-1}.

Rappel : cela signifie que $\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x))=x$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(x))=x$.

Nous allons voir que cette fonction est définie par : $\operatorname{Argsh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Correction (non détaillée) :

Partie A

1. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$ et donc $x+\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 > 0$.

b. Pour tout réel $x \leqslant 0$:

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}.$$

Pour tout réel $x \leqslant 0, \sqrt{x^2+1} \geqslant 1$ et $x-\sqrt{x^2+1} \leqslant -1 < 0$.

Donc pour tout réel $x \leqslant 0$, $\dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} > 0$.

2. a. Pour tout réel x :

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

b. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $u'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ et pour tout réel $x \leqslant 0$, $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)} > 0$. Donc u est croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ d'après **A 1**, donc $f(x) = \ln(u(x))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Pour tout réel x :

$$f(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x).$$

b. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Comme u est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f = \ln(u)$ est également croissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$.

Donc, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{a\to+\infty} f(-a) = \lim\limits_{a\to+\infty} -f(a) = -\infty$.

5. f est continue, croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

6. Pour tous réels x et k :

$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = k \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1} = e^k$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = e^k - x \Leftrightarrow x^2+1 = e^{2k} - 2xe^k + x^2$

(1) $\Leftrightarrow 2xe^k = e^{2k} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^k - e^{-k}}{2}$.

Remarque : à la question B]3., on utilise ici le fait que la composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante… C'est un résultat facile à démontrer mais non vu en classe.

On aurait également pu faire autrement en calculant $f'(x)$: $f=\ln(u)$ donc $f'=\dfrac{u'}{u}$. Or, on a vu à A]1. que $u(x)>0$ pour tout réel x, et on a vu à A]2. que $u'(x)>0$ pour tout réel x, donc $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.