T°S | SÉANCE DU MARDI 17 MARS 2020

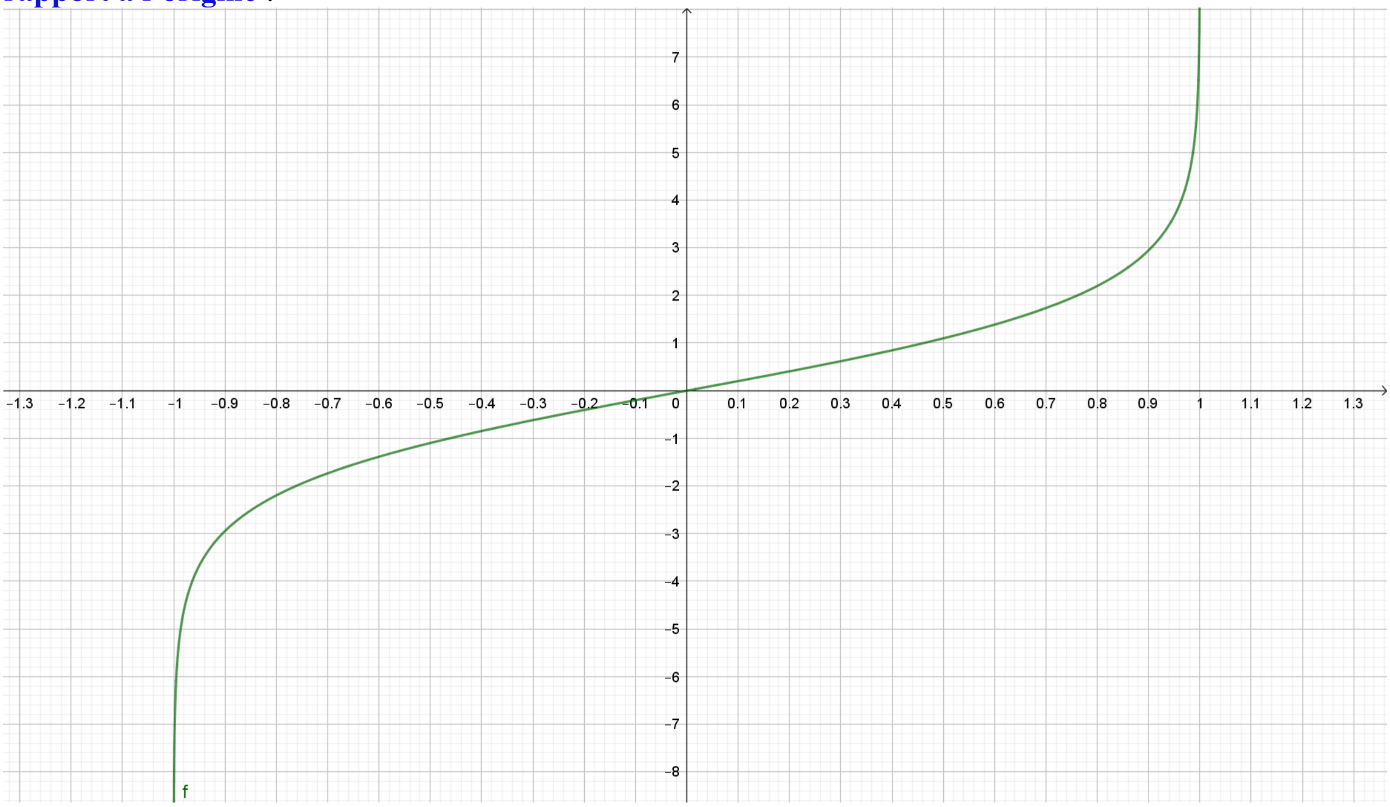
I. 33 p217 : particularité d'une fonction

a) Pour tout réel x de $]-1;1[$:

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-(-\ln(1-x)+\ln(1+x))=-(\ln(1+x)-\ln(1-x))=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

d'où $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$.

b) Cela signifie que la fonction f est impaire et que la courbe représentative de ***f* est symétrique par rapport à l'origine** :



II. 14 p216 : calculs de dérivées

a) $f(x)=2\ln x-x\ln 2$ sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
La fonction ln est dérivable sur I donc 2ln aussi.
La fonction $x\longmapsto -x\ln 2$ est affine, donc dérivable sur I.
f est donc la somme de deux fonctions dérivables sur I : f est dérivable sur I.

$$f'(x)=2\times\frac{1}{x}-\ln 2=\boldsymbol{\frac{2}{x}-\ln 2}\ .$$

b) $g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]0;1[$.
g est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, avec le dénominateur qui ne s'annule par sur I, donc g est dérivable sur I.
On pose : $u(x)=x^2$. On a : $u'(x)=2x$.

$$g=\frac{u}{\ln}\ \text{ donc }\ g'=\frac{u'\ln-u\ln'}{\ln^2}\ :\ g'(x)=\frac{2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\ \boldsymbol{=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}}\ .$$

c) $h(x)=(1-x^2)\ln x$ sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
h est le produit de deux fonctions dérivables sur I (un polynôme et la fonction ln) donc h est dérivable sur I.
On pose : $u(x)=1-x^2$. On a : $u'(x)=-2x$.

$$h=u\times\ln\ \text{ donc }\ h'=u'\ln+u\ln'\ :\quad h'(x)=\boldsymbol{-2x\ln x+(1-x^2)\times\frac{1}{x}}\ .$$

d) $k(x)=\mathrm{e}^{1+\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
k est la composée de la fonction $x\longmapsto 1+\ln x$, dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de la fonction exp, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc k est dérivable sur I.
On pose : $u(x)=1+\ln x$. On a : $u'(x)=0+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$.

$$k=\mathrm{e}^u\ \text{ donc }\ k'=u'\mathrm{e}^u\ :\ k'(x)=\boldsymbol{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}}\ .$$

On peut alors simplifier $k'(x)$: $k'(x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{1+\ln x}=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{\ln x}=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}\,x=\boldsymbol{\mathrm{e}}$.
Remarque : on aurait pu simplifier $k(x)$ dès le début en montrant que $k(x)=\mathrm{e}\,x$ et dériver directement.

III. 21 p216 : équation d'une tangente

$f(x)=1+(\ln x)^2$ sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.
- f est le produit et la somme de fonctions dérivables sur I donc f est dérivable sur I.
- $f=1+\ln^2$ donc $f'=0+2\ln'\ln$ (en effet, d'après le cours [cliquer ici] : $(u^n)'=nu'u^{n-1}$)

donc $f'(x)=0+2\times\dfrac{1}{x}\ln x$ *ie* $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

- On a alors : $f'(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ et $f(\mathrm{e})=1+(\ln\mathrm{e})^2=1+1^2=2$.
- L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est :

$$y=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+f(\mathrm{e})\ \ ie\ \ y=\frac{2}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+2\ \ ie\ \ y=\frac{2x-2\mathrm{e}+2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\ \ ie\ \ \boldsymbol{y=\frac{2}{\mathrm{e}}x}\ .$$

IV. 23 p216 : des tangentes particulières ?

$f(x)=0{,}5x+3\ln x-1$ sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$.

- f est le produit et la somme de fonctions dérivables sur I donc f est dérivable sur I.
- $f'(x)=0{,}5+3\times\frac{1}{x}-0=0{,}5+\frac{3}{x}$
- On cherche si la courbe représentative de f admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y=x$, autrement dit si l'équation $f'(x)=1$ admet des solutions :

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow 0{,}5+\frac{3}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{x}=0{,}5 \Leftrightarrow x=\frac{3}{0{,}5} \Leftrightarrow x=6$$

Donc la courbe représentative de f **admet une seule tangente parallèle** à la droite d'équation $y=x$, au point de coordonnées $(6;2+3\ln 6)$.

V. 50 p218 : de la suite dans les idées

a) $u_n=u_0\times 0{,}95^n$ *ie* $u_n=2500\times 0{,}95^n$

b) $u_n<10 \Leftrightarrow 2500\times 0{,}95^n<10 \Leftrightarrow 0{,}95^n<\frac{10}{2500} \Leftrightarrow 0{,}95^n<\frac{1}{250} \Leftrightarrow \ln(0{,}95^n)<\ln\left(\frac{1}{250}\right)$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}95)<-\ln(250)$

$\Leftrightarrow n>\frac{-\ln(250)}{\ln(0{,}95)}$ car $\ln(0{,}95)<0$ puisque $0{,}95<1$

Or, $\frac{-\ln(250)}{\ln(0{,}95)}\approx 107{,}6$

donc les entiers naturels n tels que $u_n<10$ sont **tous les entiers n tels que $n\geqslant 108$** .

c) $u_n>10^{-3} \Leftrightarrow 2500\times 0{,}95^n>10^{-3} \Leftrightarrow 0{,}95^n>\frac{10^{-3}}{2500} \Leftrightarrow 0{,}95^n>\frac{1}{25}\times\frac{10^{-3}}{100} \Leftrightarrow 0{,}95^n>0{,}04\times 10^{-5}$

$\Leftrightarrow 0{,}95^n>4\times 10^{-7}$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}95^n)>\ln(4\times 10^{-7})$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}95)>\ln(4\times 10^{-7})$

$\Leftrightarrow n<\frac{-\ln(250)}{\ln(0{,}95)}$ car $\ln(0{,}95)<0$ puisque $0{,}95<1$

Or, $\frac{-\ln(250)}{\ln(0{,}95)}\approx 287{,}2$

donc les entiers naturels n tels que $u_n>10^{-3}$ sont **tous les entiers n tels que $n\leqslant 287$** .

VI. 80 p220 : inéquation

a) A faire (facile) : on trouve l'ensemble solution $\left[-\frac{2}{3};2\right]$.

b) L'inéquation $3(\ln x)^2-4\ln x-4\leqslant 0$ (notée (E)) est définie sur $]0;+\infty[$.

(E) $\Leftrightarrow 3\mathrm{A}^2-4\mathrm{A}-4\leqslant 0$ avec $\mathrm{A}=\ln x$

$\Leftrightarrow \ln x \in \left[-\frac{2}{3};2\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leqslant \ln x\leqslant 2$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{2}{3}}\leqslant x\leqslant e^2$

vérifier que c'est dans l'ensemble de définition

L'ensemble solution de l'inéquation (E) est donc $\left[e^{-\frac{2}{3}};e^2\right]$.