T°S	SÉANCE DU LUNDI 16 MARS 2020

I. Calcul d'une limite 1

II. 30 p217 a) b) c) d) : simplifier 2

III. 46 p217 : système 2

IV. 88 p221 : limites de suites 2

V. 143 p231 : niveau sonore 3

I. Calcul d'une limite

Énoncé : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)} = ?$

La fonction dont on souhaite étudier la limite n'est définie que lorsque $x-2>0$ et $x+3>0$, c'est-à-dire lorsque $x>2$.

Pour tout réel $x>2$:

$$\frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)} = \frac{\ln\left(x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right)}{\ln\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)} = \frac{\ln x+\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{1+\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x}}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln x}}$$ en factorisant et simplifiant par $\ln x$

Or :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln X=\ln 1=0$ donc par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=0$.

Donc, par somme et quotient de limites : $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x}=1}$.

- De même : $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln x}=1}$.

Alors, par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x}}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln x}}=1$ *ie* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}=1}$.

II. 30 p217 a) b) c) d) : simplifier

a) f est définie lorsque $x>0$ et $x-2>0$, c'est-à-dire pour $x>2$.
$\forall\ x>2\ :\ f(x)=\ln x+2\ln(x-2)=\ln x+\ln((x-2)^2)=\mathbf{\ln(x(x-2)^2)}$.

b) g est définie lorsque $5-x>0$ et $x^2>0$, c'est-à-dire lorsque $x<5$ et $x\neq 0$, donc sur $]-\infty;0[\cup]0;5[$.
$\forall\ x\in\ ]-\infty;0[\cup]0;5[\ :\ g(x)=\ln(5-x)-\ln(x^2)=\mathbf{\ln\left(\frac{5-x}{x^2}\right)}$.

c) h est définie lorsque $1-x>0$ et $x+1>0$, c'est-à-dire lorsque $x<1$ et $x>-1$, donc sur $]-1;1[$.
$\forall\ x\in\ ]-1;1[\ :\ h(x)=\ln(\sqrt{1-x})-\ln 5+\ln((x+1)^2)=\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{5}\right)+\ln((x+1)^2)=\mathbf{\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}\,(x+1)^2}{5}\right)}$.

d) k est définie lorsque $1+\sqrt{x}>0$ et $1-\sqrt{x}>0$.
Or :
- $1+\sqrt{x}>0$ est définie lorsque $x\geqslant 0$ (racine carrée) et est toujours vrai puisque $\sqrt{x}\geqslant 0$.
- $1-\sqrt{x}>0 \iff 1>\sqrt{x}$
  $\iff 1>x$ (en utilisant la fonction carrée, strictement croissante sur $[0;+\infty[$)

Donc k est définie sur $[0;1[$.
$\forall\ x\in\ [0;1[\ :\ k(x)=\ln((1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}))=\mathbf{\ln(1-x)}$.

III. 46 p217 : système

On note (S) : $\begin{cases}2\ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 5\\ xy=5\end{cases}$.
Le système (S) est défini pour $x>0$ et $y>0$.

(S) $\iff \begin{cases}\ln(x^2y)=\ln(2^2\times 5)\\ xy=5\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(x^2y)=\ln(20)\\ xy=5\end{cases} \iff \begin{cases}x^2y=20\\ xy=5\end{cases} \iff \begin{cases}x\times 5=20\\ xy=5\end{cases} \iff \begin{cases}x=4\\ xy=5\end{cases} \iff \begin{cases}x=4\\ y=\frac{5}{4}\end{cases}$.

L'unique solution du système (S) est donc le couple $\left(4;\frac{5}{4}\right)$.

IV. 88 p221 : limites de suites

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to 1}\ln n=\ln 1=0$ donc, par composition de limites, $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0}$.

2. a) $\mathbf{S_n}=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum\limits_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln(k+1)-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k$
$=\sum\limits_{k=3}^{n+1}\ln k-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln k=\ln(n+1)-\ln 2=\mathbf{\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

b) $S_n=\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$ donc il est facile (à faire) de démontrer que $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty}$.

<u>Remarque</u> : on a donc montré que la suite de la question 1. converge vers 0 mais que la somme des termes de cette suite diverge vers $+\infty$! Cela nous rappelle la suite harmonique $\left(\frac{1}{n}\right)$ qui converge également vers

0 mais dont la somme des termes diverge très très lentement vers $+\infty$.

J'en profite pour rappeler que ce n'est pas toujours le cas : $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers 0 mais la somme de ses termes converge également vers $\frac{\pi^2}{6}$ et c'est le grand Euler qui l'a démontré en 1735 (signalons que, même pour les critères de l'époque, la démonstration de 1735 donnée par Euler n'est pas rigoureuse : il faudra attendre 1742 pour qu'il comble les « trous » de sa démonstration).

Sur ces exemples, je vous conseille fortement d'aller lire ou relire mon article sur le sujet, ça se boit comme du rhum : https://www.mathemathieu.fr/art/articles-maths/46-rearr-riemann.

V. 143 p231 : niveau sonore

Le Covid-19 rend fou tout le monde, donc je me suis dit qu'on pourrait faire un peu de physique…

a) $L_{20}=20\log\left(\frac{20}{2\times10^{-5}}\right)=20\log\left(10^6\right)=20\times6=\mathbf{120}$

Le niveau sonore correspondant à une pression de 20 pascals est donc **120 dBSPL**.

b) $80=20\ \log\left(\frac{P}{P_0}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{P}{P_0}\right)=4 \Leftrightarrow \log\left(\frac{P}{P_0}\right)=\log\left(10^4\right) \Leftrightarrow \frac{P}{P_0}=10^4 \Leftrightarrow P=10^4 P_0 \Leftrightarrow$

$P=10^4\times2\times10^{-5} \Leftrightarrow P=0{,}2$

La pression acoustique d'un aspirateur de 80 dBSPL est donc de 0,2 pascal.

c) Si on fait fonctionner deux aspirateurs en même temps, la pression acoustique sera de 0,4 pascal.
Il suffit alors de calculer le niveau sonore avec la formule :

$L_{0,4}=20\ \log\left(\frac{0{,}4}{2\times10^{-5}}\right)=20\log\left(2\times10^4\right)\approx86$

Le niveau sonore de deux aspirateurs utilisés en même temps sera d'environ 86 dBSPL.

Remarque : L'échelle des décibels est logarithmique, ce qui signifie qu'une augmentation du niveau sonore de 3 dB représente déjà un doublement de l'intensité sonore. Par exemple, le volume d'une conversation normale peut être d'environ 65 dB et, pour quelqu'un qui crie, ce chiffre peut atteindre environ 80 dB. La différence est seulement de 15 dB, mais le cri représente une intensité trente fois supérieure.
Il est important de souligner que l'intensité sonore n'est pas exactement la même chose que le niveau de pression acoustique. Pour traduire le fait que les sons particulièrement graves ou aigus paraissent moins forts à l'oreille humaine, le bruit se mesure généralement en décibels pondérés A (dB(A)).