LIMITES DE FONCTIONS

I. Définitions

I.1 Limite en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a-r;r[$ ou $]a;a+r[$ ($r>0$).

NOTATION	DÉFINITION
$\lim\limits_{x \to a} f(x)=l$ $(l \in \mathbb{R})$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....
$\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....
$\lim\limits_{x \to a} f(x)=+\infty$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....

Illustrations :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=l$ $\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x \to a} f(x)=+\infty$

Définitions formelles plus rigoureuses (hors-programme) :

$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad (l \in \mathbb{R})$	$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0, x \in D_f \cap]a-\lambda; a+\lambda[\Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$ ou $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0, (x \in D_f \text{ et } \lvert x-a \rvert < \lambda) \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \epsilon$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0, x \in D_f \cap]a-\lambda; a+\lambda[\Rightarrow f(x) \in]-\infty; A[$ ou $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0, (x \in D_f \text{ et } \lvert x-a \rvert < \lambda) \Rightarrow f(x) < A$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0, x \in D_f \cap]a-\lambda; a+\lambda[\Rightarrow f(x) \in]A; +\infty[$ ou $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0, (x \in D_f \text{ et } \lvert x-a \rvert < \lambda) \Rightarrow f(x) > A$

DÉFINITION. **Asymptote verticale**

Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que ....

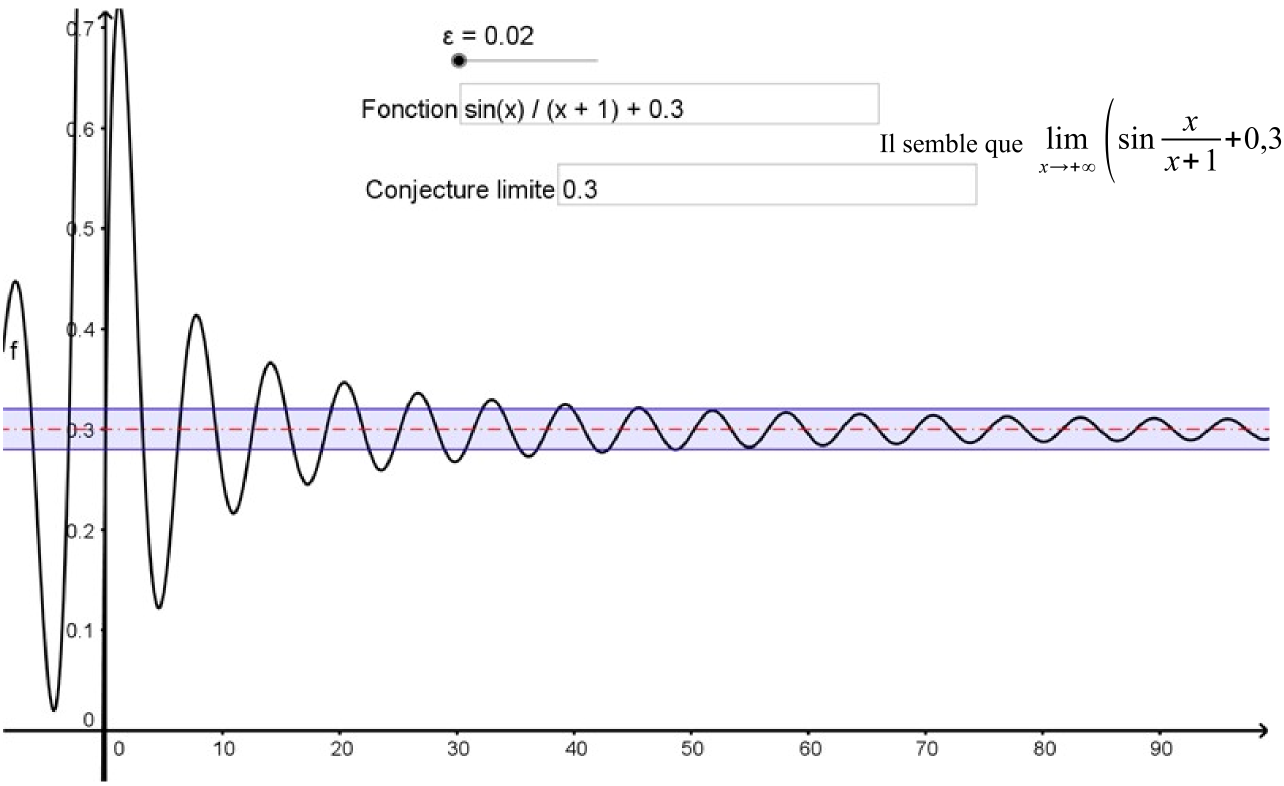
....

I.2 Limite en l'infini

- **Limites en** $+\infty$

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a; +\infty[$.

NOTATION	DÉFINITION
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad (l \in \mathbb{R})$	Tout intervalle de la forme $]l-\epsilon; l+\epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$) contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez grand.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	Tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez grand.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est assez grand.



Il semble que $\lim_{x \to +\infty} \left(\sin \frac{x}{x+1} + 0{,}3 \right) = 0{,}3$.

- **Limites en** $-\infty$

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]-\infty\,;a[$.

NOTATION	DÉFINITION
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \quad (l\in\mathbb{R})$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	Tout intervalle de la forme .... contient tous les réels .... dès que ....

Définitions formelles plus rigoureuses (hors-programme) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \quad (l\in\mathbb{R})$	$\forall\epsilon>0,\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall\epsilon>0,\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow\lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0, x\in D_f\cap]\lambda;+\infty[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda>0,(x\in D_f \text{ et } x>\lambda)\Rightarrow f(x)>A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \quad (l\in\mathbb{R})$	$\forall\epsilon>0,\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]l-\epsilon;l+\epsilon[$ ou $\forall\epsilon>0,\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow\lvert f(x)-l\rvert<\epsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]-\infty;A[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow f(x)<A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0, x\in D_f\cap]-\infty;\lambda[\Rightarrow f(x)\in]A;+\infty[$ ou $\forall A\in\mathbb{R},\exists\lambda<0,(x\in D_f \text{ et } x<\lambda)\Rightarrow f(x)>A$

DÉFINITION. **Asymptote horizontale**
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$, on dit que ....
....

II. Calculer des limites

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de α, où α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

II.1 Limite d'une somme

Admis

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$						

II.2 Limite d'un produit

Admis

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$									

II.3 Limite d'un quotient

Admis

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$							

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$					

II.4 Limite d'une composée de fonctions

Admis

THÉORÈME. Soient α, β, γ finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} h(x)=\gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(g(x))=\gamma$.

Exemple : soit f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}+2x}$.

Déterminer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

III. Limites et comparaison

III.1 Théorèmes de comparaison

Admis

THÉORÈMES. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , voisinage de α (où α désigne un réel ou + ∞ ou – ∞).

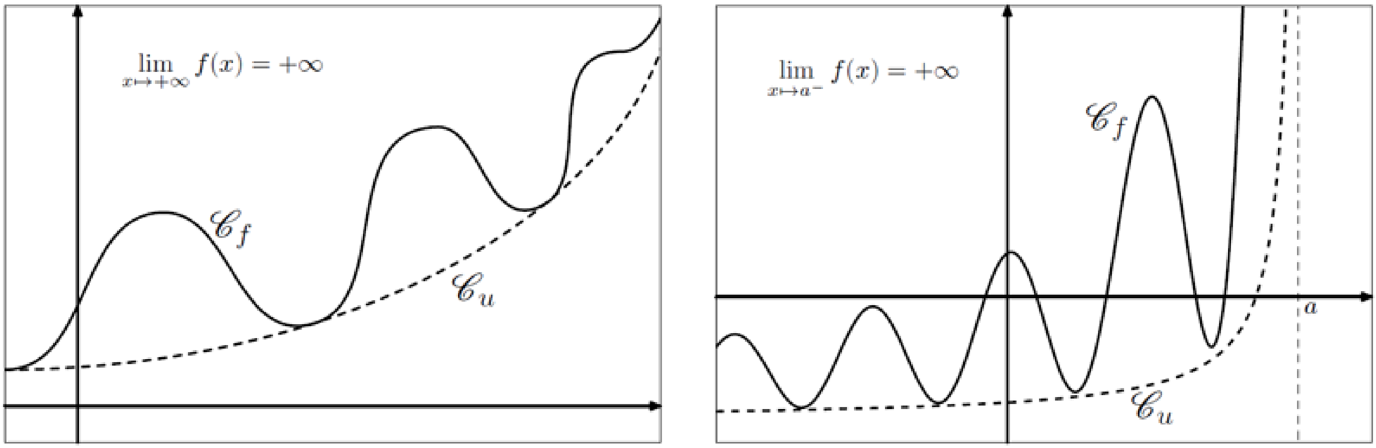
a) Si : $\forall\ x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$

alors ....

b) Si : $\forall\ x \in \mathrm{I}$, $g(x) \geqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$

alors ....

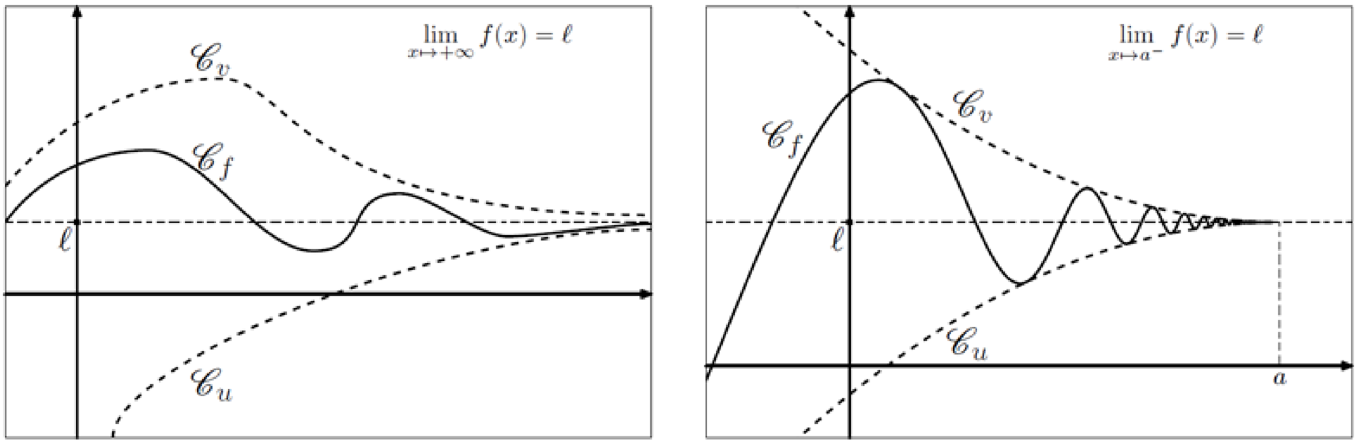
Illustration du a) *:*



source des images : chingatome.net

III.2 Théorème des gendarmes

Admis



THÉORÈME "DES GENDARMES".

Soient f , g , h trois fonctions définies sur un intervalle I , voisinage de α (où α désigne un réel ou + ∞ ou – ∞).

Si : $\forall\ x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et ....

alors ....