

Note : ..... / .....

**INTERROGATION de MATHÉMATIQUES**Durée : 30 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE**.**Exercice 1***env. 10 minutes*

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3x - 2z = 1 + 3y \\ -x + 2y + 3z = -2 \\ 4x - 2y = 3z \end{cases} .$$
**Exercice 2***env. 15 minutes*

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0=0$ ,  $u_1=1$  et pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n .$$

On note  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

1. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = AV_n$  où  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2 dont on précisera les coefficients.

2. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Justifier par un calcul que  $P$  est inversible, et donner (sans justifier)  $P^{-1}$ .

b) Vérifier (détailler tous les calculs) que  $P^{-1}AP$  est la matrice diagonale suivante :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

3. Démontrer l'hérédité du raisonnement par récurrence qui permet de démontrer que  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.