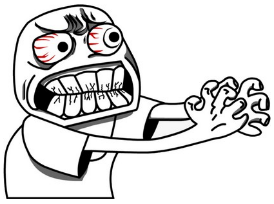
Nom : .... **Prénom** : ....

T°S



RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 3

MERCREDI 26 FÉVRIER 2020

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème par exercice (**sur 20**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.

EXERCICE 1 (≈ 9 points) *Ne me remerciez pas*

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3+(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i})z^2+(4-4\mathrm{i}\sqrt{3})z+8\mathrm{i}=0\ .$$

a) Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

b) On admet que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3+(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i})z^2+(4-4\mathrm{i}\sqrt{3})z+8\mathrm{i}=(z+2\mathrm{i})(z^2-2\sqrt{3}z+4)\ .$$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

b) A l'aide de la question 3.a), démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

EXERCICE 2 (≈ 9,5 points) *Remerciez-moi*

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-4}-2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .

3. a) Démontrer que la fonction g est dérivable sur ℝ. On notera g' sa fonction dérivée.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .

4. a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur ℝ, notée α.

b) Déterminer une valeur approchée de α au millième. Justifier rapidement votre démarche.

c) En déduire le tableau de signes de la fonction g sur ℝ.

Partie B : étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x)=x^2-x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Résoudre sur ℝ l'équation $f(x)=0$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur ℝ et on note f' sa fonction dérivée.

On admet par ailleurs que, pour tout réel x : $f'(x)=-x\,g(x)$ où g est la fonction définie à la partie A.

Étudier les variations de la fonction f sur ℝ.

3. Démontrer que le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

EXERCICE 3 (≈ 1,5 point) *Un dernier calcul et on s'en va*

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

EXERCICE 4 (≈ 0 point) *Calm down and meditate*

Méditer sur ces citations.

« Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose.
Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir.
C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée. »

Alexandre GROTHENDIECK (immense mathématicien – génie ! – apatride, puis Français : 1928 – 2014. RIP.)

« Pourquoi broder sur ce qui exclut le commentaire ? Un texte expliqué n'est plus un texte.
On vit avec une idée, on ne la désarticule pas ; on lutte avec elle, on n'en décrit pas les étapes.
L'histoire de la philosophie est la négation de la philosophie. »

Emil CIORAN (philosophe, poète et écrivain roumain)