T°S

# Exercice 58 p.131 "la piscine"

a) $f(0)=3$ $\quad f(8)=4$ $\quad f'(0)=0$ $\quad f'(8)=0$

b) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f$ polynôme donc $f$ est dérivable sur $[0;8]$ et :

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

NE JAMAIS FAIRE ÇA EN DS

c)
d)
$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(8)=4 \\ f'(0)=0 \\ f'(8)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=3 \\ a\times 8^3+b\times 8^2+c\times 8+d=4 \\ c=0 \\ 3a\times 8^2+2b\times 8+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ 512a+64b+3=4 \\ c=0 \\ 192a+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ 512a+64b=1 \\ 192a+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\frac{1-64b}{512} \\ 192\times\frac{1-64b}{512}+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\frac{1-64b}{512} \\ \frac{192}{512}-8b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\frac{1-64b}{512} \\ b=\dots=\frac{3}{64} \end{cases} \iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\dots=-\frac{1}{256} \\ b=\frac{3}{64} \end{cases}$$

2.a) $E(12;0)$ On note $\mathcal{C}_{DE}$ le quart de cercle $\overset{\frown}{DE}$.
$E'(4;0)$

$M(x;y) \in \overset{\frown}{DE} \iff E'ME$ rectangle en $M$ et $x \in [8;12]$, $y \in [0;4]$

$\iff E'E^2 = E'M^2 + ME^2$ et...

$\iff 8^2 = (x-4)^2 + y^2 + (x-12)^2 + (-y)^2$ et...

$\iff 64 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + x^2 - 24x + 144 + y^2$ et...

$\iff 0 = 2x^2 - 32x + 96 + 2y^2$ et...

$\iff 0 = x^2 - 16x + 48 + y^2$ et...

$\iff y^2 = -x^2 + 16x - 48$ et...

$\iff y = \sqrt{-x^2+16x-48}$ et $x \in [8;12]$

D'où $h(x) = \sqrt{-x^2+16x-48}$.

b) • De même... équation du cercle de centre O passant par A (quart de cercle) : $x^2 + y^2 = 9$ donc $y = \sqrt{9-x^2}$ avec $x \in [-3;0]$

• Sur $[0;8]$, la courbe représente $f(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + 3$ (q° 1)

• La courbe est visiblement symétrique par rapport à l'axe des abscisses, donc la piscine est la réunion de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{-g}$.

c) • Sur $]-3;0[$ : $x \mapsto 9 - x^2$ est dérivable, à valeurs dans $]0;9[$
et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;9[$
donc $x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ dérivable sur $]-3;0[$.

• Sur $]0;8[$, $g$ est un polynôme donc dérivable.

• Sur $]8;12[$, $x \mapsto -x^2+16x-48$ est dérivable, à valeurs dans $]0;+\infty[$
et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
donc $x \mapsto \sqrt{-x^2+16x-48}$ est dérivable sur $[8;12[$.

• Étude en 0 : $(g(0) = 3)$

• sur $]0;8[$ : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + 3 - 3}{x} = -\frac{1}{256}x^2 + \frac{3}{64}x$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$.

• sur $[-3;0[$ : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - 3}{x} = \dfrac{9 - x^2 - 3^2}{x(\sqrt{9-x^2}+3)} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}+3}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

Donc $g$ est dérivable en 0.

Suite exercice 58 p.131 "La piscine" T°S.

- **Etude en 8** ($g(8) = \ldots = 4$)

  - Sur $[0;8[$ : $\dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = \dfrac{-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 - 1}{x-8}$ à détailler

$$= \frac{\cancel{(x-8)}(-x^2+4x+32)}{256\,\cancel{(x-8)}}$$

$$= \frac{1}{256}(-x^2+4x+32)$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x<8}} \dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = \dfrac{1}{256}(-8^2+4\times 8+32) = 0$.

  - Sur $]8;12[$ : $\dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = \dfrac{\sqrt{-x^2+16x-48} - 4}{x-8}$

$$= \frac{-x^2+16x-48-4^2}{(x-8)\left(\sqrt{-x^2+16x-48}+4\right)}$$

$$= \frac{-x^2+16x-64}{(x-8)\left(\sqrt{-x^2+16x-48}+4\right)}$$

$$= \frac{-\cancel{(x-8)}(x-8)}{\cancel{(x-8)}\left(\sqrt{-x^2+16x-48}+4\right)}$$

$$= \frac{-x+8}{\sqrt{-x^2+16x-48}+4}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x>8}} \dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = 0$

Donc <u>g est dérivable en 8</u>.

- **Etude en $-3$ :** $X \mapsto \sqrt{X}$ n'est pas dérivable en 0

  donc $x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ n'est pas dérivable en $-3$.

  ie <u>g n'est pas dérivable en $-3$</u>.

- **Etude en 12 :** Idem (et $-12^2+16\times 12-48=0$)

  ie <u>g n'est pas dérivable en 12</u>.