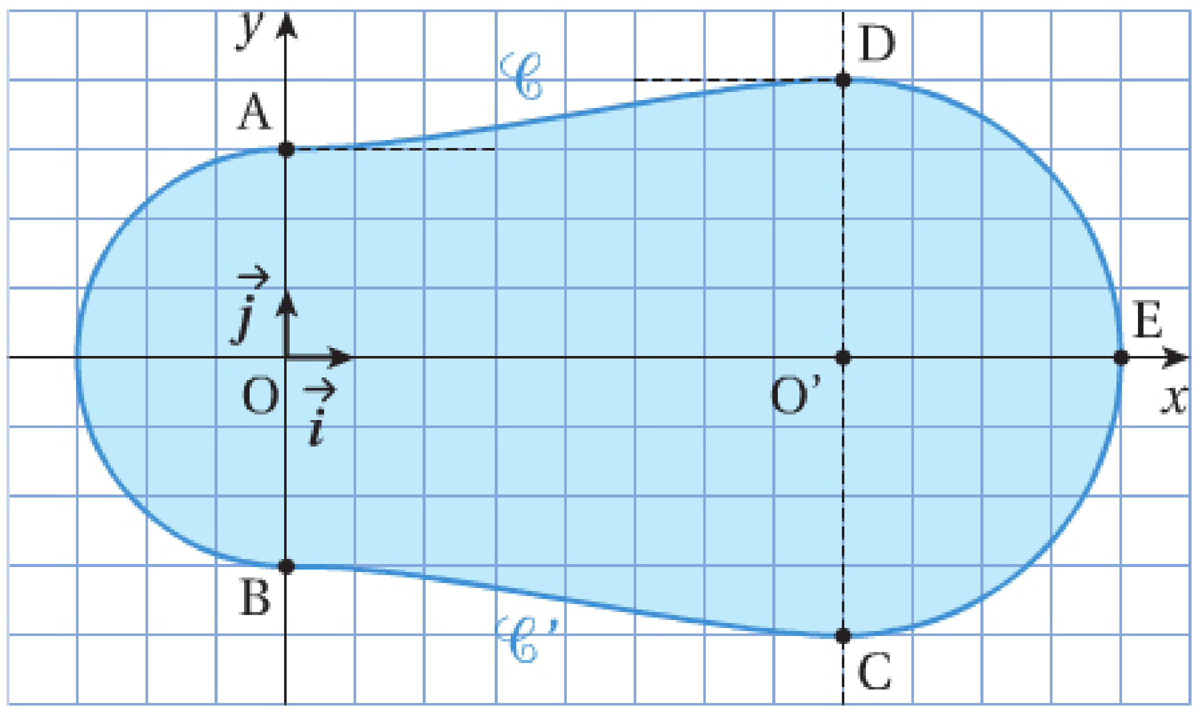
58 La piscine

Pour la construction d'une piscine, un architecte a imaginé la forme de la figure ci-dessous (vue de dessus de la piscine), où $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm. Le périmètre de cette piscine est constitué de deux demi-cercles : $\overset{\frown}{AB}$ de centre O et de rayon 3, et $\overset{\frown}{CD}$ de centre O' et de rayon 4, reliés par deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'axe des abscisses est un axe de symétrie de la figure.

La courbe $\mathscr{C}$ reliant les points A et D est la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$.



a. En remarquant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A d'abscisse 0, le point D d'abscisse 8, et qu'en ces points elle admet une tangente horizontale, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(8)$, $f'(0)$ et $f'(8)$.

b. On suppose qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b, c, d et x.

c. Déduire des questions précédentes que $c = 0$ et $d = 3$ et que les réels a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} 512a + 64b = 1 \\ 192a + 16b = 0 \end{cases}$$

d. Résoudre le système précédent.

2. a. Soit E le point de coordonnées $(12 ; 0)$.
Déterminer une fonction h définie sur l'intervalle $[8 ; 12]$ telle que sa courbe soit le quart de cercle $\overset{\frown}{DE}$.

b. Soit g la fonction définie sur $[-3 ; 12]$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{9 - x^2} & \text{pour } x \in [-3 ; 0[\\ g(x) = -\dfrac{1}{256}x^3 + \dfrac{3}{64}x^2 + 3 & \text{pour } x \in [0 ; 8[\\ g(x) = \sqrt{-x^2 + 16x - 48} & \text{pour } x \in [8 ; 12] \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g et $\mathscr{C}_{-g}$ celle de la fonction $-g$. Montrer que tout le tracé de la piscine est la réunion des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_{-g}$.

c. La fonction g est-elle dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 12]$?

D'après *Bac STI Génie mécanique, génie civil*, Métropole, 2009.