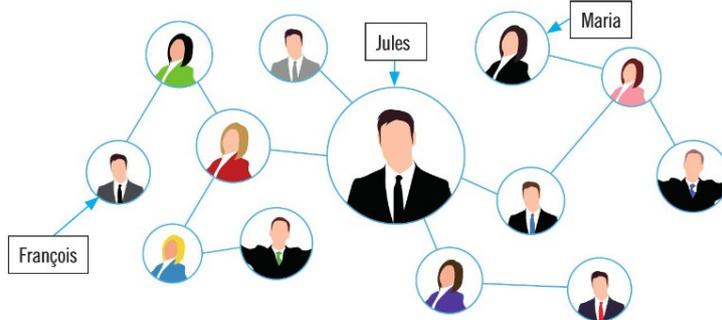


## THÉORIE DES GRAPHES ET RÉSEAUX SOCIAUX

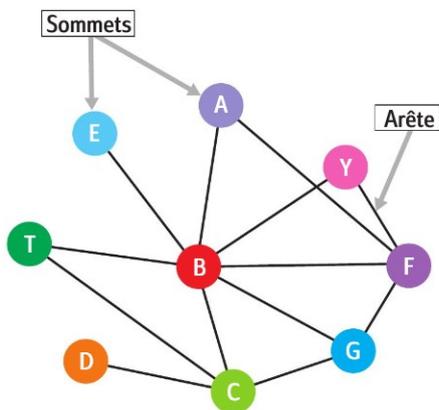
Documents 2, 3 et 4 p.56 :

## DOCUMENT 2 Les liens sur un réseau social



Le graphe ci-dessus représente les relations entre différents individus ayant créé leur profil sur un réseau social. Un lien entre deux individus indique qu'ils sont amis sur le réseau. On constate que le degré de séparation entre Maria et François est de six.

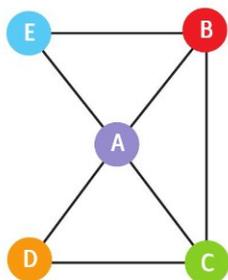
## DOCUMENT 3 Graphe de réseau



Le graphe de réseau, représentation graphique des liens entre différents individus d'un groupe (représentés par des sommets), possède plusieurs caractéristiques :

- une **chaîne** ou suite de sommets. Pour aller de Y à D, une des chaînes possibles est : Y, F, B, C, D.
- une **longueur** attribuée à cette chaîne, soit le nombre d'arêtes ; ici, 4.
- une **distance** de la chaîne, correspondant à la chaîne la plus courte entre Y et D ; ici, Y, B, C, D, soit de valeur 3 ;
- un **diamètre** qui est la plus grande des distances.

## DOCUMENT 4 Diamètre, centre et rayon d'un graphe



Distance de	A	B	C	D	E	Distance la plus grande par ligne
A		1	1	1	1	1
B	1		1	2	1	2
C	1	1		1	2	2
D	1	2	1		2	2
E	1	1	2	2		2

A est le **centre** du graphe puisque A est à la plus petite distance des autres sommets du graphe.

Le **diamètre** du graphe est 2.

Le **rayon** (plus petite distance) est 1.

## Exercice d'application

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cléo est amie avec Mathias, Stella, Carla et Léopold</li> <li>• Mathias est ami avec Cléo, Maxime, Carla, Léopold et Léane</li> <li>• Léane est amie avec Mathias, Charles et Léopold</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Léopold est ami avec Maxime, Cléo, Mathias et Léane</li> <li>• Carla est amie avec Cléo et Mathias</li> <li>• Stella est amie avec Cléo</li> <li>• Maxime est ami avec Léopold et Mathias</li> <li>• Charles est ami avec Léane</li> </ul> |
|---|---|

Représentons ces relations d'amitiés de deux façons différentes :

1) Graphe :

2) Tableau à double entrée :

Mettre un 1 pour signifier une amitié et 0 pour signifier une absence d'amitié.

	Cléo	Mathias	Léane	Léopold	Carla	Stella	Maxime	Charles
Cléo								
Mathias								
Léane								
Léopold								
Carla								
Stella								
Maxime								
Charles								

Cela donne ce qu'on appelle en théorie des graphes une **matrice d'adjacence**, bien utile pour calculer (par exemple) le nombre de chaînes d'une certaine longueur qui relient deux sommets...

	Cléo	Mathias	Léane	Léopold	Carla	Stella	Maxime	Charles
Cléo								
Mathias								
Léane								
Léopold								
Carla								
Stella								
Maxime								
Charles								

Remplir le tableau ci-contre avec la distance entre chacun des sommets du graphe de l'exercice précédent.

Quel est le diamètre du graphe ?

\_\_\_\_\_

Quel est le centre du graphe ?

\_\_\_\_\_

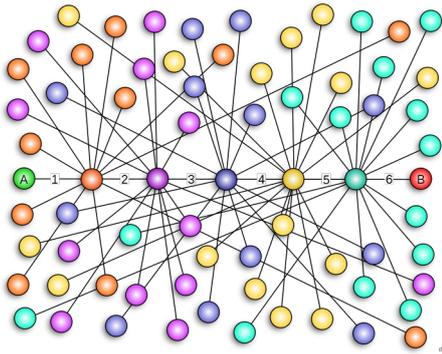
Que peut-on dire des personnes occupant le centre d'un graphe ?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## L'EXPÉRIENCE DE MILGRAM



### EN BREF

Le principe des **six degrés de séparation** suggère que deux personnes choisies au hasard sont reliées en moyenne par une chaîne de six relations.

En 1929, la population humaine mondiale était d'environ 1,5 milliard. Cette année-là, l'auteur hongrois Frigyes Karinthy publie un volume de nouvelles intitulé *Minden másképpen van* (« Tout est différent »). L'une des histoires s'intitule *Láncszemek* (« Chaînon ») et analyse plusieurs des problèmes qui vont captiver les générations futures de mathématiciens, sociologues et physiciens dans le domaine de la théorie des réseaux. En effet, en raison des avancées technologiques dans les domaines de la communication et des voyages, les réseaux d'amitié ont pu s'étendre sur des distances plus grandes qu'auparavant, et F. Karinthy pensait que le monde moderne était en train "de rétrécir", étant donné la connectivité de plus en plus grande des humains. C'est pourquoi il défia plusieurs personnes de trouver une autre personne à qui il ne pouvait pas être connecté par au plus cinq personnes.

Suivant les pas de Karinthy mais aussi de nombreux scientifiques, le psychologue américain Stanley Milgram reprit le défi en 1967. Cela le mena à mener des expériences (qu'il expliquera dans *The Small World Problem*, publié dans la revue *Psychology Today* en 1967, avec une version plus rigoureuse dans la revue *Sociometry* deux ans plus tard).

Il décrit alors sa vision de la théorie « du petit monde » : « la manière la plus simple de formuler le problème du petit monde est "quelle est la probabilité que deux personnes quelconques, choisies arbitrairement dans une grande population, comme celle des États-Unis, se connaissent ?" ».

Afin d'approfondir cette théorie, Milgram propose surtout de représenter les 200 millions d'américains (à l'époque) par un graphe : chaque sommet est une personne et chaque arête représente une connaissance entre deux individus (la connaissance est ici supposée être symétrique). Compte tenu de cette structure, la problématique du « petit monde » est : « étant donné deux individus sélectionnés au hasard de la population, quelle est la probabilité que le nombre minimum d'intermédiaires requis pour les relier soit égal à 0 ? À 1 ? À 2 ? Etc. » Il propose également de se poser la même question en remplaçant le problème de la chaîne minimale par celui de la longueur moyenne : en moyenne (en probabilités), combien d'intermédiaires sont requis pour relier deux individus sélectionnés au hasard ?

Pour attaquer le problème, Milgram propose une série d'expériences.

Expérience n°1 : il fit partir **60 lettres du Nebraska**, elles devaient rejoindre le Massachusetts, chez une personne donnée dont l'adresse était fournie. Le principe était assez simple : il fallait remettre la lettre en main propre à des personnes dont on pensait qu'elles allaient s'approcher de la cible.

Sur les 60 lettres initialement prévues, **seules 50 sont effectivement parties... et seules 3 lettres sont arrivées à destination**, dont une en 4 jours. Les résultats n'ont jamais été publiés.

Expérience n°2 : **296 volontaires** reçoivent un document, ils doivent le faire parvenir par courrier à une cible (un agent de change situé à Boston), uniquement via des connaissances (une connaissance étant ici définie comme une personne qui connaît le prénom de l'expéditeur). Plusieurs informations sur la cible étaient fournies pour guider chaque nouvel expéditeur dans son choix de destinataire. Ainsi, chaque document a fait son chemin le long d'une chaîne de connaissances de longueur indéfinie, une chaîne qui ne se terminait que lorsqu'elle atteignait la cible ou lorsque quelqu'un en cours de route refusait de participer.

Les volontaires de départ (= *starters*) étaient :

- 100 volontaires de Boston (ville d'arrivée), sollicités par une publicité parue dans un journal
- 96 résidents de l'état du Nebraska, sollicités par courrier
- 100 résidents de l'état du Nebraska, possédant des actions (on peut penser que ceux-ci sont plus intéressés par la réussite de l'expérience).

La participation était volontaire ; aucune personne n'a été rémunérée par de l'argent ou des récompenses/cadeaux pour inciter à s'investir.



Parmi les 296 *starters*, 217 ont envoyé le message/document (soit **27 % d'échec dès le départ**).

Sur ces 217 cas, **64 ont finalement atteint l'objectif**, soit 29 % de réussite !

Il est probable que cela se produise pour l'une des deux raisons principales :

- 1) les individus n'étaient pas motivés à participer à l'étude ;
- 2) ils ne savaient pas à qui envoyer le document pour avancer vers la cible.

Aux pages 431/432 de l'étude, on trouve le graphique suivant :

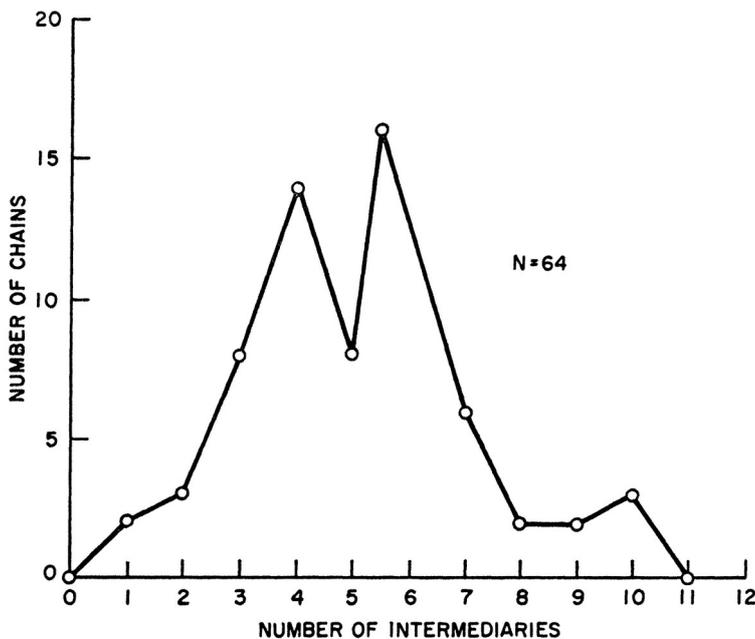


FIGURE 1

*Lengths of Completed Chains*

**DISTRIBUTION OF CHAIN LENGTHS. Complete Chains.** Figure 1 shows the frequency distribution of lengths of the completed chains. "Chain length" is here defined as the number of intermediaries required to link starters and target. The mean of the distribution is 5.2 links.

En moyenne, combien d'intermédiaires ont été nécessaires pour relier le *starter* à la cible ? \_\_\_\_\_

Parmi les 64 cas (les chaînes) ayant aboutis, combien ont nécessité moins de 3 intermédiaires (3 inclus) ? Quel pourcentage cela représente ?

Combien ont nécessité moins de 5 intermédiaires (5 inclus) ? Quel pourcentage cela représente ?

Il y a visiblement une petite erreur dans la création du graphique... L'avez-vous trouvée ? \_\_\_\_\_

Dans l'étude, on peut lire par exemple que le groupe du Nebraska possédant des actions a utilisé en moyenne 5,4 intermédiaires, contre 5,7 pour l'autre groupe du Nebraska n'en possédant pas. Mais la différence n'est pas significative d'un point de vue statistique.

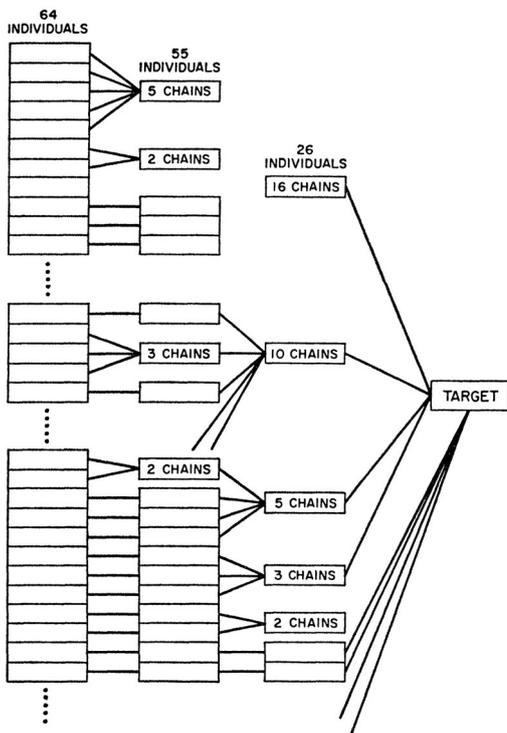


FIGURE 3

*Common Paths Appear as Chains Converge on the Target*

Milgram observa un effet « d'entonnoir » : lorsque les chaînes convergent sur la cible, des canaux communs apparaissent, c'est-à-dire que certains intermédiaires apparaissent dans plusieurs chaînes.

La figure 3 montre le schéma de convergence.

Les 64 lettres qui ont atteint l'objectif ont été envoyées par un total de 26 personnes :

- 16 ont atteint l'objectif par l'intermédiaire d'un simple voisin de la cible
- 10 ont pris contact avec un associé de la cible
- 5 ont pris contact avec un autre associé
- etc.

Autrement dit, presque la moitié des chaînes passe par les trois mêmes personnes avant d'atteindre la cible !

Et vous, que pensez-vous de cette expérience et de ses conclusions ?

## À SAVOIR

1. L'une des œuvres les plus célèbres de Milgram est une **étude de l'obéissance et de l'autorité** (qui vise à déterminer le niveau jusqu'auquel la soumission à l'autorité prime sur la conscience et l'éthique personnelle : jusqu'où peut-on aller par obéissance ?), qui est largement connue sous le nom « d'expérience de Milgram ». Pour s'en faire une idée rapide, voir cette vidéo (2 min) :

<https://youtu.be/mxf7G0WEJ20>

2. Milgram **n'a jamais utilisé l'expression « six degrés de séparation »**. Le vulgarisateur le plus probable de l'expression « six degrés de séparation » est John Guare, qui a attribué la valeur "six" à Guglielmo Marconi.

3. Cette théorie du « petit monde » a depuis été largement utilisée et étudiée.

Par exemple, en 1998, Duncan J. Watts et Steven Strogatz de l'Université Cornell ont publié le premier modèle de réseau sur le phénomène du petit monde. Ils ont montré que les réseaux du monde naturel (comme les réseaux électriques) et artificiel (comme les réseaux de neurones utilisés en intelligence artificielle), présentent les caractéristiques du « petit monde ». Ils ont ainsi montré que, en commençant par un réseau régulier, l'ajout d'un petit nombre de liens aléatoires réduit le diamètre (de très long à très court)<sup>1</sup>. On peut aisément imaginer des applications de cette découverte aux réseaux électriques...

Le modèle mathématique développé par Watts et Strogatz a depuis été appliqué dans un large éventail de domaines différents (mathématiques, physique, biochimie, neurophysiologie, épidémiologie, économie, sociologie ; marketing ; systèmes d'information ; réseautage sur Internet ; etc.).

Par exemple, en informatique, le phénomène du petit monde (bien qu'il ne soit pas généralement appelé ainsi) est utilisé dans le développement de protocoles peer-to-peer sécurisés, de nouveaux algorithmes de routage pour Internet, les réseaux sans fil et des algorithmes pour les réseaux de communication de toute sorte.

<sup>1</sup> À l'origine, Watts cherchait à étudier la synchronisation des chants des crickets (qui montrent un haut degré de coordination sur de longues distances, comme si les insectes étaient guidés par un conducteur invisible).

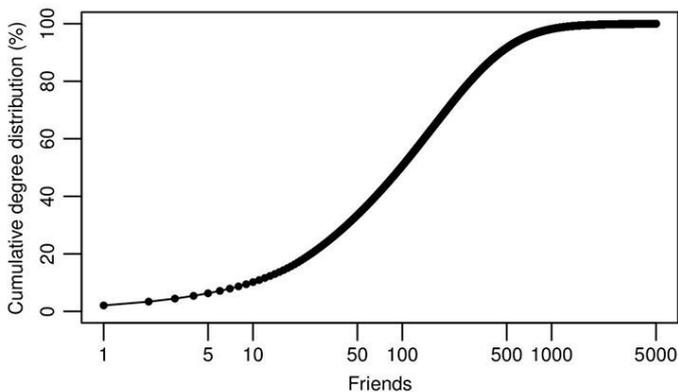
## ET AUJOURD'HUI ?

• En 2006, une équipe de Microsoft ayant analysé plus de 30 milliards de conversations sur *Live Messenger* a montré qu'il faut en moyenne créer des liens avec 6,6 contacts pour discuter avec n'importe quel utilisateur dans le monde.

• En 2011, l'Université de Milan<sup>2</sup> (en partenariat avec Facebook) a montré qu'**un membre du réseau social Facebook est séparé, en moyenne, de tout autre membre par 4,74 relations !**

Dans cette étude, ils ont examiné les 721 millions d'utilisateurs actifs de Facebook (plus de 10 % de la population mondiale), dont 69 milliards d'amitiés. À ce jour, c'est la plus grande étude de réseau social jamais publiée.

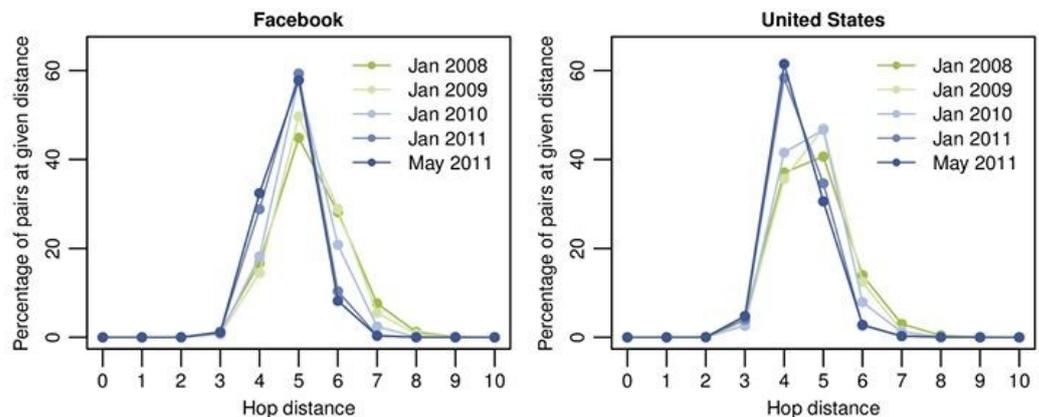
Une vue de base importante de tout réseau social est la distribution cumulative des degrés, qui montre le pourcentage d'individus qui ont moins d'un certain nombre d'amis :



Exemple de lecture du graphique : 10 % des personnes ont moins de 10 amis, 20 % ont moins de 25 amis, tandis que 50 % (la médiane) ont plus de 100 amis.

Et parce que la distribution est très asymétrique, le nombre moyen d'amis est de 190.

D'après l'étude, alors que 99,6 % de toutes les paires d'utilisateurs sont connectés par 5 intermédiaires (on dit « par des chemins à 5 degrés »), 92 % sont connectés par seulement 4 degrés. Et comme Facebook s'est développé au fil des ans, représentant une fraction de plus en plus importante de la population mondiale, il est devenu de plus en plus connecté : la distance moyenne en 2008 était de 5,28 sauts, alors qu'elle est en 2011 de 4,74.



Lorsque l'analyse est limitée à un seul pays (comme ci-dessus aux USA), le monde devient encore plus petit et **la plupart des paires de personnes ne sont séparées que de 3 degrés.**

L'étude précise bien qu'il est important de noter que même si Milgram était motivé par la même question (combien de personnes séparent deux personnes ?), ces chiffres ne sont pas directement comparables ; ses sujets n'avaient qu'une connaissance limitée du réseau social, alors que les scientifiques de l'étude avaient une représentation presque complète de l'ensemble, leur permettant ainsi de trouver les itinéraires les plus courts possibles...

<sup>2</sup> <https://www.facebook.com/notes/facebook-data-team/anatomy-of-facebook/10150388519243859>