Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MARDI 21 JANVIER 2020

MATHÉMATIQUES

Série ES : enseignement de spécialité

Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Les partie A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève 8,5 tonnes d'algues sur les plages de sa commune.
Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages.
Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %.
On note u_n la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année $2018+n$. Ainsi, $u_0 = 230$.

1. Vérifier par le calcul que Richard disposera de 230,36 tonnes sur les plages au 1er septembre 2019.

   On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n - 8{,}84$.

2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$.
   - **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04.
     Préciser son premier terme.
   - **b.** Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9 \times 1{,}04^n$.
3. La quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera-t-elle un jour 250 tonnes ? Si oui, préciser au bout de combien d'années cette quantité sera atteinte.

Partie B

Pour développer son entreprise, à partir du 1er septembre 2019, Richard a besoin de 10 % d'algues de plus que l'année précédente.
On rappelle qu'au 1er septembre 2018, il disposait de 230 tonnes d'algues et qu'il en avait consommé 8,5 tonnes en septembre 2018. Dans cette nouvelle situation, il disposera de 230,36 tonnes d'algues au 1er septembre 2019 et en utilisera 9,35 tonnes pendant ce mois.
Richard souhaite étudier la quantité d'algues sur les plages concernées pour les 16 prochaines années selon ce modèle.
Pour cela il rédige l'algorithme ci-contre.

```
A ← 230
B ← 8,5
Pour K allant de 1 à 16
    A ← (A − B) × 1,04
    B ← B × 1,1
Fin pour
```

1. Que représentent les variables A et B de l'algorithme ?
2. Dans le tableau en **annexe** , on a obtenu différentes valeurs de A et B de l'algorithme. Compléter les lignes du tableau pour les valeurs de $K = 1$ et $K = 2$.

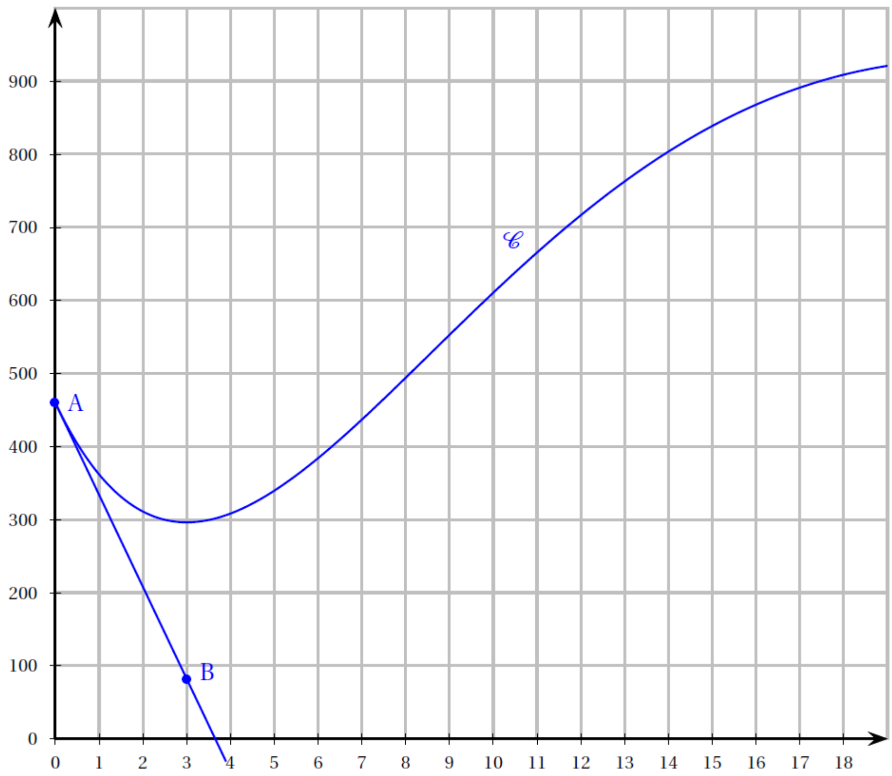
   Arrondir les résultats au centième.
3. Que peut conclure Richard pour 2034 ?

EXERCICE 2 [6 points] *Commun à tous les candidats*

Partie A

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0;19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1^er^ janvier 2000 (année numéro 0) et le 1^er^ janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.

Ainsi, le 1^er^ janvier 2000, la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.



1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1^er^ janvier 2000 et le 1^er^ janvier 2019.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1^er^ janvier 2014.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $A(0;460)$ et $B(3;82)$, est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A. Déterminer la valeur de $f'(0)$ (on admet ici que f est dérivable en 0, en notant f' la fonction dérivée de f).

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journaliser (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;29]$ par : $f(x)=(20x^2-80x+460)e^{-0,1x}$, où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple, $x=19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1^er^ janvier 2014.

2. a) Démontrer que f est dérivable sur $[0;29]$.

b) Dans la suite, on notera f' la fonction dérivée de f sur $[0;29]$.

Démontrer que f' est définie par : $f'(x)=(-2x^2+48x-126)e^{-0,1x}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;29]$ et construire le tableau des variations de f sur ce même intervalle. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

d) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution dans l'intervalle $[3;21]$, que l'on notera α.

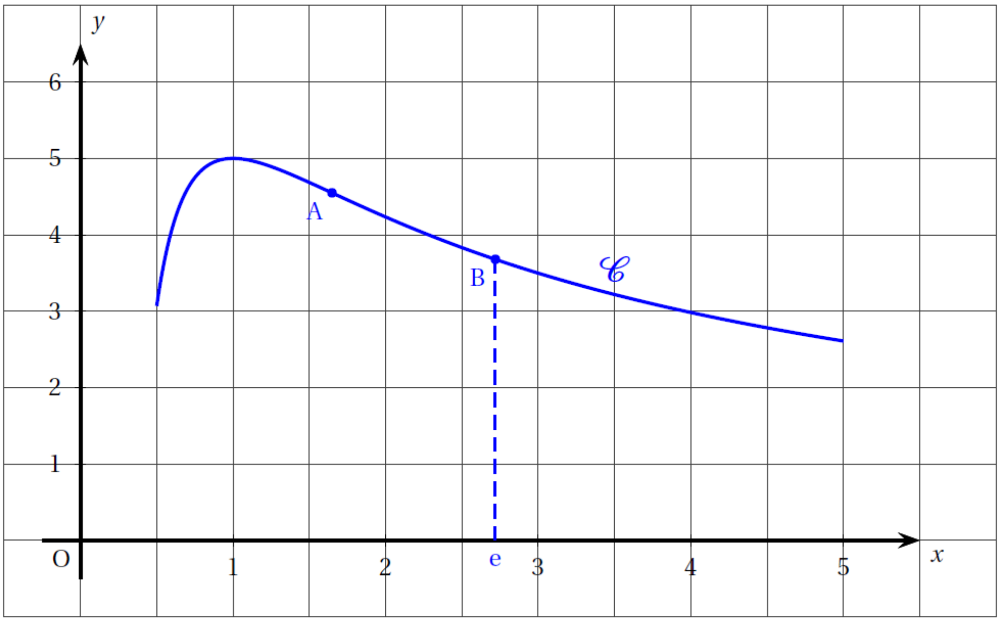
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.

c) Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

EXERCICE 3 [4 points] *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chacune des questions posées, une seule des propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie (lettre et réponse).
Aucune justification n'est demandée.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0,5;5]$, dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



1. La fonction f' est :
- **a)** positive sur $[0,5;5]$
- **b)** négative sur $[1;5]$
- **c)** négative sur $[0,5;1]$

2. La fonction f'' est :
- **a)** négative puis positive
- **b)** positive puis négative
- **c)** négative
- **d)** positive

3. La fonction f' est :
- **a)** croissante sur $[0,5;1]$
- **b)** décroissante sur $[1;5]$
- **c)** croissante sur $[2;5]$

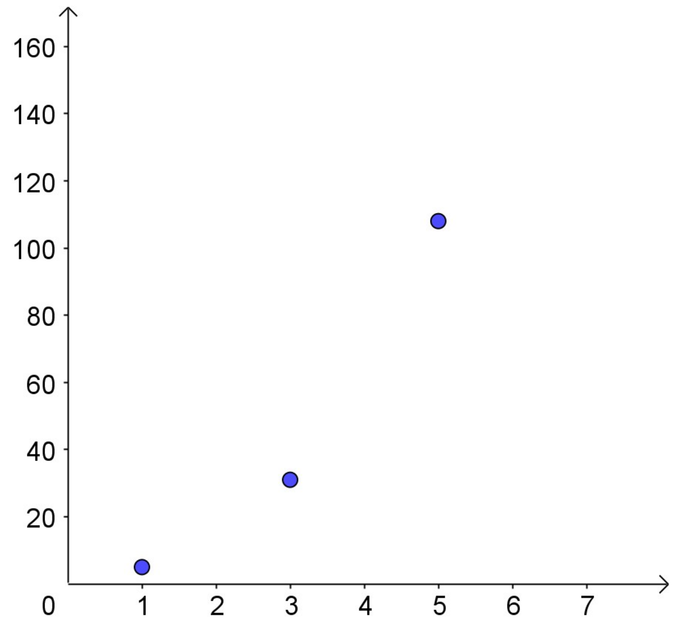
4. $f'(1)$ est égal à :
- **a)** 5
- **b)** 0
- **c)** 3,1

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Julie propose à son professeur de mathématiques d'observer la rapidité avec laquelle une rumeur peut se répandre.
Le lundi 10 décembre 2018, elle lance la rumeur, en disant à son ami qu'elle est amoureuse de Baptiste… Elle lui demande alors de dire cette information à l'une de ses connaissances, en lui demandant à nouveau de partager la nouvelle avec quelqu'un, etc.
Le soir même, 5 personnes sont « au courant » et sont venues en parler à Julie.
On considère que ce lundi 10 décembre est le jour 1.
Le troisième jour, 31 personnes semblent avoir connaissances de l'information, et le cinquième jour c'est 108 personnes qui savent que Julie aime Baptiste !
Afin de modéliser cette évolution, Julie décide de faire le graphique suivant :



Elle souhaite alors tracer une courbe qui passe par les trois points. Elle choisit la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 : $f(x)=ax^2+bx+c$.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

2. a) Écrire ce système sous la forme d'une équation $AX=B$ où A et B sont des matrices.

b) Déterminer les valeurs des réels a, b et c.

3. Au premier janvier 2020, l'INSEE estime la population de la France à 67 063 703 habitants.

Selon le modèle de Julie, est-il théoriquement possible que la France entière sache qu'elle est amoureuse de Baptiste ? Après combien de jours ?

Partie B

On suppose qu'au 1er janvier 2019, tous les adolescents d'Albi sont « au courant » de la rumeur.
Au 1er janvier 2019, 20 % de ces adolescents pensent que la rumeur est vraie.
On suppose que chaque jour, 70 % des adolescents qui pensent la rumeur vraie ne changent pas d'avis, tandis que 20 % des adolescents qui pensent la rumeur fausse changent d'avis.

Pour tout entier naturel n, on note :

- v_n la proportion des adolescents d'Albi qui pensent la rumeur vraie n jours après le 1er janvier 2019
- f_n la proportion des adolescents d'Albi qui pensent la rumeur fausse n jours après le 1er janvier 2019
- $E_n = (v_n \quad f_n)$ la matrice traduisant l'état « général » n jours après le 1er janvier 2019.

Ainsi, on a $E_0 = (0{,}2 \quad 0{,}8)$.

1. Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel n : $E_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} E_n$.

2. a) On admet que l'on a $v_n + f_n = 1$ (en effet, v_n et f_n sont des proportions).

Démontrer qu'alors, pour tout entier naturel n: $v_{n+1} = 0{,}5v_n + 0{,}2$.

b) On admet que (v_n) est croissante et que, pour tout entier naturel n, $v_n = -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$.

Julie affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'adolescents albigeois qui pensent cette rumeur vraie dépassera le seuil de 50 %.

Peut-on valider cette affirmation ? Argumenter la réponse.

ANNEXE

Exercice 1

Valeurs de A et B obtenues à l'aide d'un tableur

K	*A*	*B*
	230	8,5
1		
2		
3	228,35	11,31
4	225,72	12,44
5	221,80	13,69
6	216,44	15,06
7	209,43	16,56
8	200,58	18,22
9	189,66	20,04
10	176,40	22,05
11	160,53	24,25
12	141,73	26,68
13	119,65	29,34
14	93,92	32,28
15	64,11	35,51
16	29,75	39,06