Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MARDI 21 JANVIER 2020

MATHÉMATIQUES

Série ES : enseignement obligatoire

Coefficient : 5

Série L : enseignement de spécialité

Coefficient : 4

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Les partie A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève 8,5 tonnes d'algues sur les plages de sa commune.
Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages.
Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %.
On note u_n la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année $2018+n$. Ainsi, $u_0 = 230$.

1. Vérifier par le calcul que Richard disposera de 230,36 tonnes sur les plages au 1er septembre 2019.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n - 8{,}84$.

2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$.

  a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04.
  Préciser son premier terme.

  b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.

  c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9 \times 1{,}04^n$.

3. La quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera-t-elle un jour 250 tonnes ? Si oui, préciser au bout de combien d'années cette quantité sera atteinte.

Partie B

Pour développer son entreprise, à partir du 1er septembre 2019, Richard a besoin de 10 % d'algues de plus que l'année précédente.
On rappelle qu'au 1er septembre 2018, il disposait de 230 tonnes d'algues et qu'il en avait consommé 8,5 tonnes en septembre 2018. Dans cette nouvelle situation, il disposera de 230,36 tonnes d'algues au 1er septembre 2019 et en utilisera 9,35 tonnes pendant ce mois.
Richard souhaite étudier la quantité d'algues sur les plages concernées pour les 16 prochaines années selon ce modèle.
Pour cela il rédige l'algorithme ci-contre.

```
A ← 230
B ← 8,5
Pour K allant de 1 à 16
    A ← (A − B) × 1,04
    B ← B × 1,1
Fin pour
```

1. Que représentent les variables A et B de l'algorithme ?

2. Dans le tableau en **annexe** , on a obtenu différentes valeurs de A et B de l'algorithme. Compléter les lignes du tableau pour les valeurs de $K = 1$ et $K = 2$.

Arrondir les résultats au centième.

3. Que peut conclure Richard pour 2034 ?

EXERCICE 2 [6 points] *Commun à tous les candidats*

Partie A

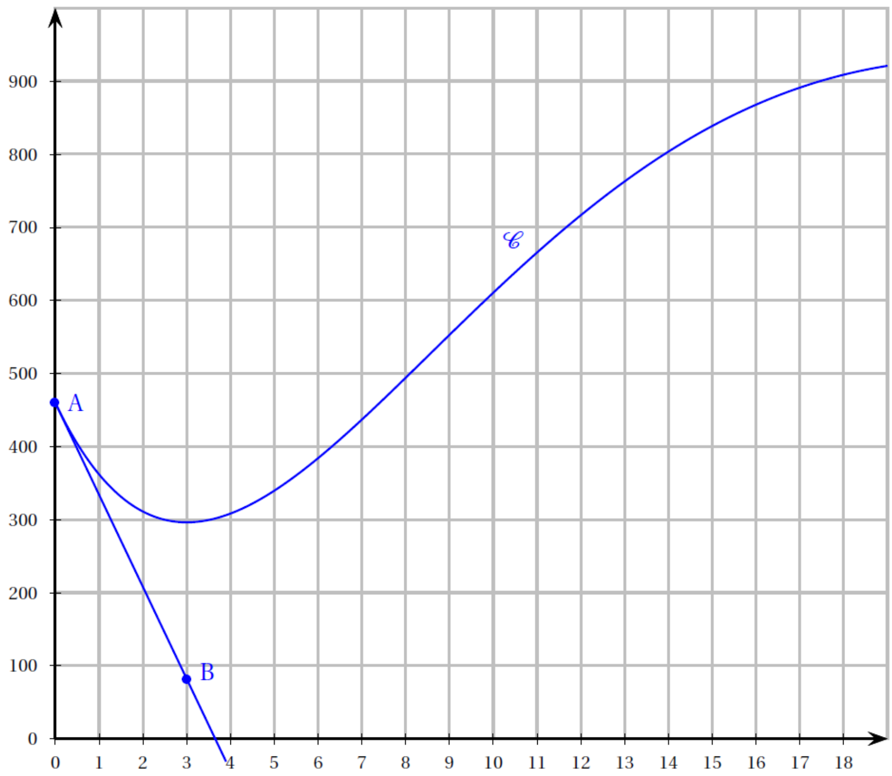
La courbe ($\mathscr{C}$) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0;19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.

Ainsi, le 1er janvier 2000, la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.

2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $A(0;460)$ et $B(3;82)$, est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A. Déterminer la valeur de $f'(0)$ (on admet ici que f est dérivable en 0, en notant f' la fonction dérivée de f).



Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journaliser (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;29]$ par : $f(x)=(20x^2-80x+460)\mathrm{e}^{-0,1x}$, où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple, $x=19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.

2. a) Démontrer que f est dérivable sur $[0;29]$.

b) Dans la suite, on notera f' la fonction dérivée de f sur $[0;29]$.

Démontrer que f' est définie par : $f'(x)=(-2x^2+48x-126)\mathrm{e}^{-0,1x}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;29]$ et construire le tableau des variations de f sur ce même intervalle. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

d) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution dans l'intervalle $[3;21]$, que l'on notera α.

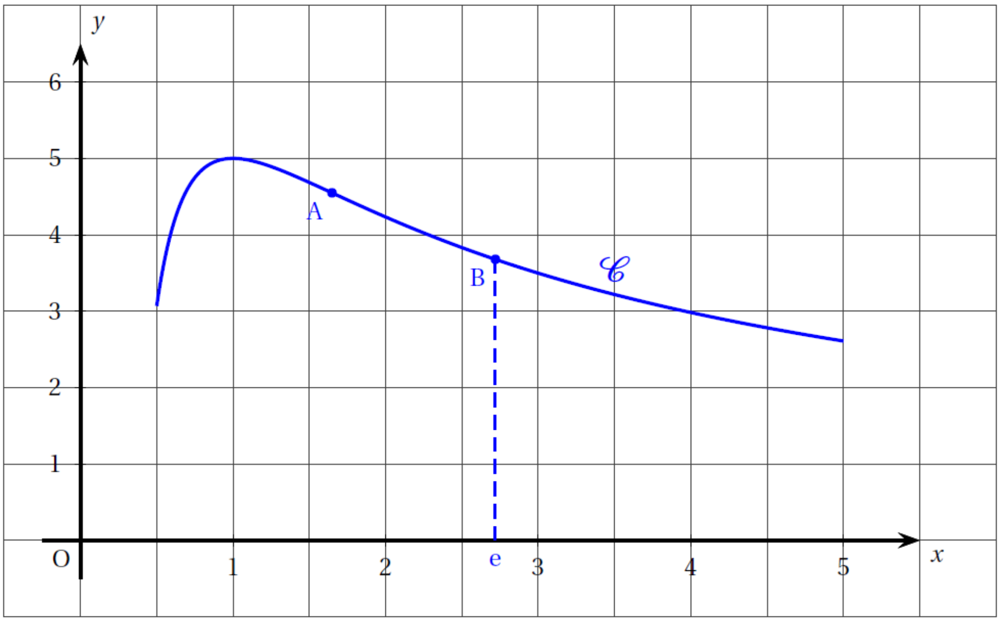
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.

c) Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

EXERCICE 3 [4 points] *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chacune des questions posées, une seule des propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie (lettre et réponse).
Aucune justification n'est demandée.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0,5;5]$, dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



1. La fonction f' est :

a) positive sur $[0,5;5]$
b) négative sur $[1;5]$
c) négative sur $[0,5;1]$

2. La fonction f'' est :

a) négative puis positive
b) positive puis négative
c) négative
d) positive

3. La fonction f' est :

a) croissante sur $[0,5;1]$
b) décroissante sur $[1;5]$
c) croissante sur $[2;5]$

4. $f'(1)$ est égal à :

a) 5
b) 0
c) 3,1

EXERCICE 4 [5 points]

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de série L

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1,028 v_n \end{array}\right.$$

1. **a.** Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

   b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
        U ← U + 0,4
        V ← V × 1,028
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46.

   Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « An essay on the principle of population » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

   Il écrit :

   « *Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique.* »

   En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de $2,8\,\%$ chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir $0,4$ million de personnes de plus chaque année.

   On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

   a. Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ?
   On arrondira le résultat au millième.

   b. À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

   c. À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait-elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

ANNEXE

Exercice 1

Valeurs de A et B obtenues à l'aide d'un tableur

K	A	B
	230	8,5
1		
2		
3	228,35	11,31
4	225,72	12,44
5	221,80	13,69
6	216,44	15,06
7	209,43	16,56
8	200,58	18,22
9	189,66	20,04
10	176,40	22,05
11	160,53	24,25
12	141,73	26,68
13	119,65	29,34
14	93,92	32,28
15	64,11	35,51
16	29,75	39,06