Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 22 JANVIER 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [6 points] *Commun à tous les candidats*

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3+(-2\sqrt{3}+2\,\mathrm{i})z^2+(4-4\,\mathrm{i}\sqrt{3})z+8\,\mathrm{i}=0\,.$$

a) Montrer que le nombre $-2\,\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3+(-2\sqrt{3}+2\,\mathrm{i})z^2+(4-4\,\mathrm{i}\sqrt{3})z+8\,\mathrm{i}=(z+2\,\mathrm{i})(z^2-2\sqrt{3}z+4)\,.$$

c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\,\mathrm{i}$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b) Placer ces points sur une figure que l'on complétera par la suite.

c) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

b) A l'aide de la question 3.a), démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

EXERCICE 2 [4 points] *Commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 et de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, etc.

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

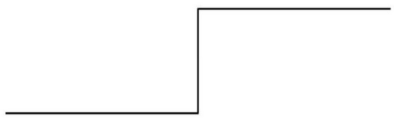
On envoie un octet au hasard. On suppose que la transmission de chaque bit est indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

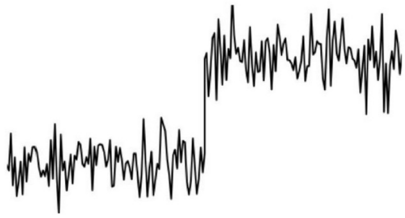
1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.

3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « la probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Remarque culturelle : les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure suivante.





Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit appelé bit de parité qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1, en détaillant à côté les calculs effectués.

2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

3. Calculer la probabilité de l'événement B.

EXERCICE 3 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+2)e^{x-4}-2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.

3. a) Démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera g' sa fonction dérivée.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.

4. On admet que $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, et que $\alpha \approx 3,07$.

En déduire le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet par ailleurs que, pour tout réel x : $f'(x)=-x\,g(x)$ où g est la fonction définie à la partie A.
Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A (*Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*)

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x et y tels que : $40=x+y$.

2. On considère l'équation $20x+19y=40$ (où $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$). Résoudre cette équation.

3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40=2^2+6^2$. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2-y^2=40$ (où $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$).

a) Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.

b) Montrer que si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x-y$ et $x+y$ ont la même parité.

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2-y^2=40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : « sommes » de cubes (*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*)

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.
Par exemple : $13=4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$ $\quad 13=-1^3-1^3-1^3+2^3+2^3$ $\quad 13=1^3+7^3+10^3-11^3$.
Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme » de cubes à la place de « sommes et/ou différences de cubes d'entiers naturels ». Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1. a) En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.

b) On admet que, pour tout entier naturel n : $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$.
En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1.a).

2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40=4^3-2^3-2^3-2^3$.

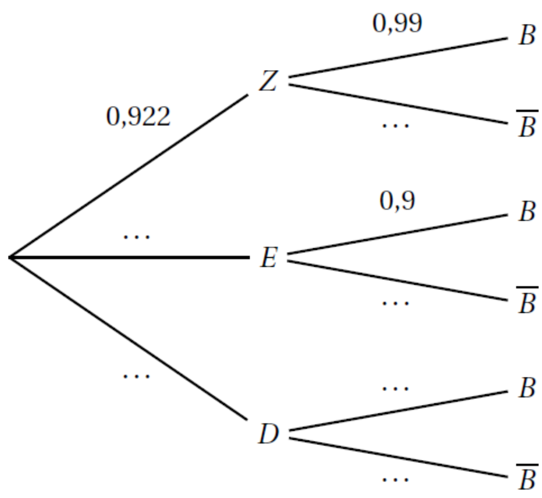
a) Recopier et compléter le tableau suivant, sans justifier.

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1. Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

ANNEXE 1
(EXERCICE 2)

à compléter sur cette feuille



POUR CEUX QUI ONT TERMINÉ

COMPLÉMENTS SUR LES BITS

On entend/lit souvent qu'un ordinateur travaille en binaire : 0 si le courant ne passe pas, 1 s'il passe.
En réalité : un ordinateur fonctionne avec des courants électriques qui transmettent des informations, d'où la notion de *bit* (**bi**nary digi**t** = nombre binaire).
L'information binaire (0 ou 1) est transmise le plus souvent par un courant électrique (mais parfois par des variations d'intensité lumineuse comme dans les fibres optiques) et est représentée par une tension, par exemple proche de zéro volt pour 0, ou proche de la tension maximale pour 1. Les courants circulent surtout lors des changements d'état 0→1 et 1→0 (au-delà des courants de fuite), et c'est la cause principale de consommation électrique (ils permettent de charger ou décharger la capacité des circuits).
On parle ici de « courant = 1 / pas de courant = 0 » mais c'est plus nuancé ! On parle d'informations binaires : 0 ou 1, vrai/faux, circuit ouvert/circuit fermé, oui/non, 0V/5V. Pour les circuits logiques fonctionnant en 5V on dit généralement 0=0V et 1=5V mais ce n'est pas tout à fait exact car il y a en fait des seuils à respecter : 0 → de 0V à 0,4V et 1 → de 2,4V à 5V pour un circuit TTL LS 74xx ou 54xx…).
Pour les circuits plus récents style ESP32 Microcontrôleur, ils fonctionnent en logique 3,3V : 0→0v et 1→3,3V.
Ce sont donc des niveaux de tension qui déclenchent une porte et non pas du courant. Les tensions font basculer les transistors formant la porte logique ET (on vérifie le bon fonctionnement via un voltmètre ou mieux un analyseur logique).
Sur ces portes logiques, pour ceux que ça intéresse, voir l'excellente page de Wikibooks :
https://fr.wikibooks.org/wiki/Fonctionnement_d'un_ordinateur/Les_transistors_et_portes_logiques.

CITATIONS POUR RÉFLÉCHIR

Voici quelques citations du génial philosophe roumain Emil Cioran (1911-1995).

« Ce qui rend les mauvais poètes plus mauvais encore, c'est qu'ils ne lisent que des poètes (comme les mauvais philosophes ne lisent que des philosophes), alors qu'ils tireraient un plus grand profit d'un livre de botanique ou de géologie. On ne s'enrichit qu'en fréquentant des disciplines étrangères à la sienne. Cela n'est vrai, bien entendu, que pour les domaines où le moi sévit. »

« À mesure qu'on accumule les années, on se forme une image de plus en plus sombre de l'avenir. Est-ce seulement pour se consoler d'en être exclu ? Oui en apparence, non en fait, car l'avenir a toujours été atroce, l'homme ne pouvant remédier à ses maux qu'en les aggravant, de sorte qu'à chaque époque l'existence est bien plus tolérable avant que ne soit trouvée la solution aux difficultés du moment. »

« La connaissance à petite dose enchante ; a forte dose, elle déçoit. Plus on en sait, moins on veut en savoir. Car celui qui n'a pas souffert de la connaissance n'aura rien connu. »

« N'a de convictions que celui qui n'a rien approfondi. »

« Dès que les animaux n'ont plus besoin d'avoir peur les uns des autres, ils tombent dans l'hébétude et prennent cet air accablé qu'on leur voit dans les jardins zoologiques. Les individus et les peuples offriraient le même spectacle si un jour ils arrivaient à vivre en harmonie, à ne plus trembler ouvertement ou en cachette. »

« Dans une métropole, comme dans un hameau, ce qu'on aime encore le mieux est d'assister à la chute d'un de ses semblables. »

« Un zoologiste qui, en Afrique, a observé de près les gorilles, s'étonne de l'uniformité de leur vie et de leur grand désœuvrement. Des heures et des heures sans rien faire… Ils ne connaissent donc pas l'ennui ?
Cette question est bien d'un homme, d'un singe occupé. Loin de fuir la monotonie, les animaux la recherchent, et ce qu'ils redoutent le plus c'est de la voir cesser. Car elle ne cesse que pour être remplacée par la peur, cause de tout affairement.
L'inaction est divine. C'est pourtant contre elle que l'homme s'est insurgé. Lui seul, dans la nature, est incapable de supporter la monotonie, lui seul veut à tout prix que quelque chose arrive, n'importe quoi. Par là, il se montre indigne de son ancêtre : le besoin de nouveauté est le fait d'un gorille fourvoyé. »

« L'injustice gouverne l'univers. Tout ce qui s'y construit, tout ce qui s'y défait porte l'empreinte d'une fragilité immonde, comme si la matière était le fruit d'un scandale au sein du néant. Chaque être se nourrit de l'agonie d'un autre être ; les instants se précipitent comme des vampires sur l'anémie du temps ; le monde est un réceptacle de sanglots… Dans cet abattoir, se croiser les bras ou sortir l'épée sont des gestes également vains. Aucun déchaînement superbe ne saurait secouer l'espace ni ennoblir les âmes. »

(*Précis de décomposition*[1])

1 Ce premier livre écrit en français (commencé en 1946, publié en 1949) est le fruit de son exil forcé pour fuir le stalinisme qui s'installe en Roumanie. Il laisse sa famille et ses amis dont plusieurs seront torturés pour les relations épistolaires qu'ils entretiendront avec lui. Cioran vient donc d'arriver à Paris, déçu de tout, de lui-même, en proie au pessimisme et à la dépression la plus noire. Ce livre est donc composé de ses réflexions sur son ressenti, sa souffrance d'exilé.