PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Activité d'introduction : effet d'un événement sur la probabilité d'un autre

A l'épreuve pratique du permis de conduire, on a observé les résultats suivants sur un échantillon de 503 candidats se présentant pour la première fois.

Candidats	Ayant pratiqué la conduite accompagnée	N'ayant pas pratiqué la conduite accompagnée	Total
Ayant réussi à la première présentation	68	205	**273**
Ayant échoué à la première présentation	19	211	**230**
Total	**87**	**416**	**503**

On choisit au hasard un candidat dans cet échantillon. On considère les événements C : « le candidat a pratiqué la conduite accompagnée » et R : « le candidat a réussi à la première présentation ».
On donnera les résultats sous forme de fractions.

1. Calculer les probabilités $p(C)$, $p(R)$ et $p(C\cap R)$.

2. Le candidat déclare qu'il a pratiqué la conduite accompagnée.
Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu son permis à la première présentation :

Calculer le quotient $\dfrac{p(C\cap R)}{p(C)}$:

Qu'observe-t-on ?

3. Le candidat déclare qu'il a a obtenu son permis à la première présentation.
Déterminer la probabilité qu'il ait pratiqué la conduite accompagnée :

Calculer le quotient $\dfrac{p(C\cap R)}{p(R)}$:

Qu'observe-t-on ?

I. Probabilités conditionnelles

Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère un événement A tel que $p(A) \neq 0$.

DÉFINITION.
Pour tout événement B, on appelle ***probabilité conditionnelle de B sachant A***, notée $p_A(B)$, le nombre suivant : $p_A(B) =$

On a donc :

PROPRIÉTÉ.
$$p(A \cap B) =$$

Démonstration :

Exemple : dans un sac de dragées, 60 % des dragées sont de couleur bleue, 30 % des dragées sont bleues et à l'amande, et 40 % des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac.
On note : A : « la dragée est à l'amande », B : « la dragée est bleue », C : « la dragée est au chocolat ».
Les probabilités données dans l'énoncé sont donc : $p(B) = \dots$, $p(A \cap B) = \dots$, $p_B(C) = \dots$.
On peut en déduire :

- la probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue : $p_B(A) = \dots$

- la probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat : $p(B \cap C) = \dots$

PROPRIÉTÉS. $\dots \leqslant p_A(B) \leqslant \dots$ et $p_A(\overline{B}) =$

Démonstrations :

Remarque : on avait vu en seconde que $p(\overline{B}) = 1 - p(B)$.
La formule est donc identique pour une probabilité conditionnelle.

II. Arbre de probabilités

II.1 Arbre commençant par deux branches

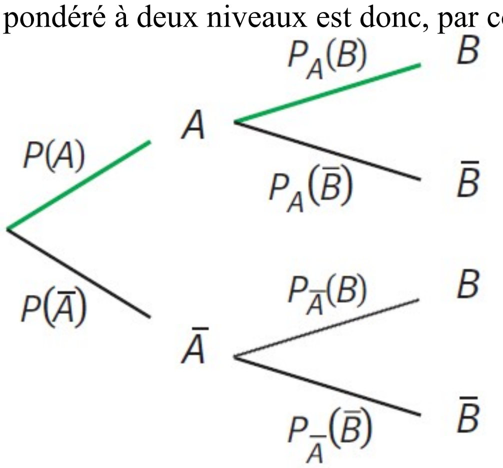
Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère un événement B tel que $p(B)\neq 0$ et $p(B)\neq 1$.
Étant donné un événement A conditionné par l'événement B, on visualise la situation à l'aide d'un ***arbre de probabilités*** :

- une ***branche*** est représentée par un segment ; chacune porte une probabilité
- un ***nœud*** est la jonction de deux ou plusieurs branches
- un ***chemin*** est l'événement réalisé en suivant des branches successives

Nous avons vu que pour tous les événements A et B tels que $p(A)\neq 0$:

- $p(A)\times p_A(B)=p(A\cap B)$;
- $p(A)+p(\overline{A})=1$ et $p_A(B)+p_A(\overline{B})=1$.

La construction d'un arbre pondéré à deux niveaux est donc, par convention :



et ainsi, les règles de calcul sont les suivantes :

> **RÈGLE 1.**
> La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemples :

> **RÈGLE 2.**
> La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.

Exemples :

> **RÈGLE 3.**
> La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Exemples :

II.2 Exercice-type

Pour l'inscription à un concours, les candidats ont dû choisir une langue : anglais ou espagnol. 30 % des candidats sont des garçons et 60 % d'entre eux ont choisi l'anglais.
Parmi les femmes, 80 % ont choisi l'anglais.

On choisit un candidat au hasard. On considère les événements suivants :

G : « le candidat choisi est un garçon »
A : « le candidat choisi a opté pour l'anglais ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide des événements G et A.

2. Représenter la situation par un arbre et indiquer les probabilités de l'énoncé.

3. a) Calculer $p(G \cap A)$ et $p(\overline{G} \cap A)$.

b) Calculer $p_G(\overline{A})$ et $p_{\overline{G}}(\overline{A})$.

c) Calculer la probabilité que le candidat ait pris l'anglais.

d) Calculer la probabilité qu'un candidat ayant pris l'anglais soit un garçon.

II.3 Arbre commençant par plusieurs branches

Rappel : on dit que des événements A_1, A_2, …, A_n forment une partition d'un univers Ω lorsque ces événements sont incompatibles deux à deux et lorsque leur réunion est égale à Ω.

PROPRIÉTÉ. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soient A_1, A_2, …, A_n des événements qui forment une partition de l'univers, tels que chacun d'eux a une probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors :

$$p(B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+\ldots+p(A_n)\times p_{A_n}(B) \quad \textit{ie} \quad p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\times p_{A_i}(B).$$

Autrement dit, la règle « la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent » reste valable pour un arbre à plusieurs branches au premier niveau…
et par conséquence, les règles de construction et d'utilisation d'un arbre pondéré pour plus de deux événements sont les mêmes que pour deux.

Démonstration :

Exemple :

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines.
Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité.
Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

Machine utilisée	n°1	n°2	n°3
Pièces produites (en pourcentage du total)	50	35	15
Fréquence des défauts (par machine)	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

III. Indépendance de deux événements

Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère des événements A et B.

Idée : deux événements sont indépendants quand ***la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre****.*

DÉFINITION.
A et B sont des ***événements indépendants*** lorsque $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

PROPRIÉTÉ. Si $p(B) \neq 0$ alors :
A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$.

Démonstration :

Exemple : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on considère les événements A : « obtenir pile au premier lancer » et B : « obtenir deux résultats identiques ».

Avec Ω = {(p,p) ; (p,f) ; (f,p) ; (f,f)} on a :

A = …

B = …

$A \cap B$ = …

d'où les probabilités de ces trois événements : $p(A) = p(B) =$ … et $p(A \cap B) =$ … .

On constate que …………………………………… donc A et B …………………………………… .

ATTENTION :

Il ne faut pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité !

	Union	Intersection
Cas général	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
Cas particulier	Si les événements A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Si les événements A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

PROPRIÉTÉ. **ROC**
si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration :

On en déduit alors facilement :

PROPRIÉTÉS. Si A et B sont deux événements indépendants, alors :
- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

IV. Culture : le théorème de Bayes

Une maladie (exemple : cancer) est présente dans une population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000, soit 0,01 %.

Un patient vient de passer un test pour le dépistage de cette maladie.
Le médecin le convoque pour lui annoncer le résultat : mauvaise nouvelle, il est positif.
Il lui indique alors que ce test est plutôt fiable :

« Si vous avez cette maladie, le test sera positif dans 99 % des cas.
Si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 99,8 % des cas ».

A votre avis, puisque le test est positif, quelle est la probabilité que le patient ait la maladie ?

☐ 90 % ? ☐ 80 % ☐ 70 % ☐ 60 % ☐ moins de 60 % ☐ moins de 30 %