CORRECTION DS1 (TERMINALE S)
MERCREDI 2 OCTOBRE 2019

EXERCICE 1

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{7}{3}u_n-4-3=\frac{7}{3}u_n-7=\frac{7}{3}(u_n-3)=\frac{7}{3}v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{7}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-3=-5-3=-8$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n=v_0\times\left(\frac{7}{3}\right)^n$ *ie* $v_n=-8\times\left(\frac{7}{3}\right)^n$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n=v_n+3$ *ie* $u_n=-8\times\left(\frac{7}{3}\right)^n+3$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n=-8\left(\frac{7}{3}\right)^{n+1}+8\left(\frac{7}{3}\right)^n=8\times\left(\frac{7}{3}\right)^n\times\left(-\frac{7}{3}+1\right)=8\times\left(\frac{7}{3}\right)^n\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{-32}{3}\times\left(\frac{7}{3}\right)^n$.

4. $\frac{-32}{3}<0$ et $\left(\frac{7}{3}\right)^n>0$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n<0$ *ie* $v_{n+1}<v_n$.
Donc (v_n) est strictement décroissante.

$u_n=v_n+3$ alors, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}+3-v_n-3=v_{n+1}-v_n$.
d'où, puisque (v_n) est strictement décroissante, $u_{n+1}-u_n<0$ *ie* $u_{n+1}<u_n$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

EXERCICE 3

$\sum_{k=1}^{1985}(-2k+7)$ est la somme des 1985 premiers termes d'une suite arithmétique de raison -2 , donc :

$$\sum_{k=1}^{1985}(-2k+7)=1985\times\frac{(-2\times1+7)+(-2\times1985+7)}{2}=1985\times\frac{-3958}{2}=-3\,928\,315 .$$

Autre méthode :

$$\sum_{k=1}^{1985}(-2k+7)=\sum_{k=1}^{1985}-2k+\sum_{k=1}^{1985}7=-2\times\left(\sum_{k=1}^{1985}k\right)+7\times1985=-2\frac{1985\times1986}{2}+13\,895=-3\,928\,315$$

EXERCICE 2

1. On note P(n) : « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

Initialisation : $n=0$
$(1+a)^0=1$ et $1+na=1$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit n ∈ ℕ. On suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie : $\forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na$.
Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, *ie* $\forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.
$(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)$
donc $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$ (on a utilisé l'hypothèse de récurrence)
c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na+na^2$.
Or, $na^2 \geqslant 0$ donc : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na$
c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.
Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : ce raisonnement par récurrence montre que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout n ∈ ℕ :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_{+,}^{*} (1+a)^n \geqslant 1+na}$$

2. On note $\mathrm{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation

$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1)(2 \times 1+1)}{6} = 1$
donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit n ∈ ℕ* (fixé). On suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(6n+6+2n^2+n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} .$$

Or : $(n+1+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

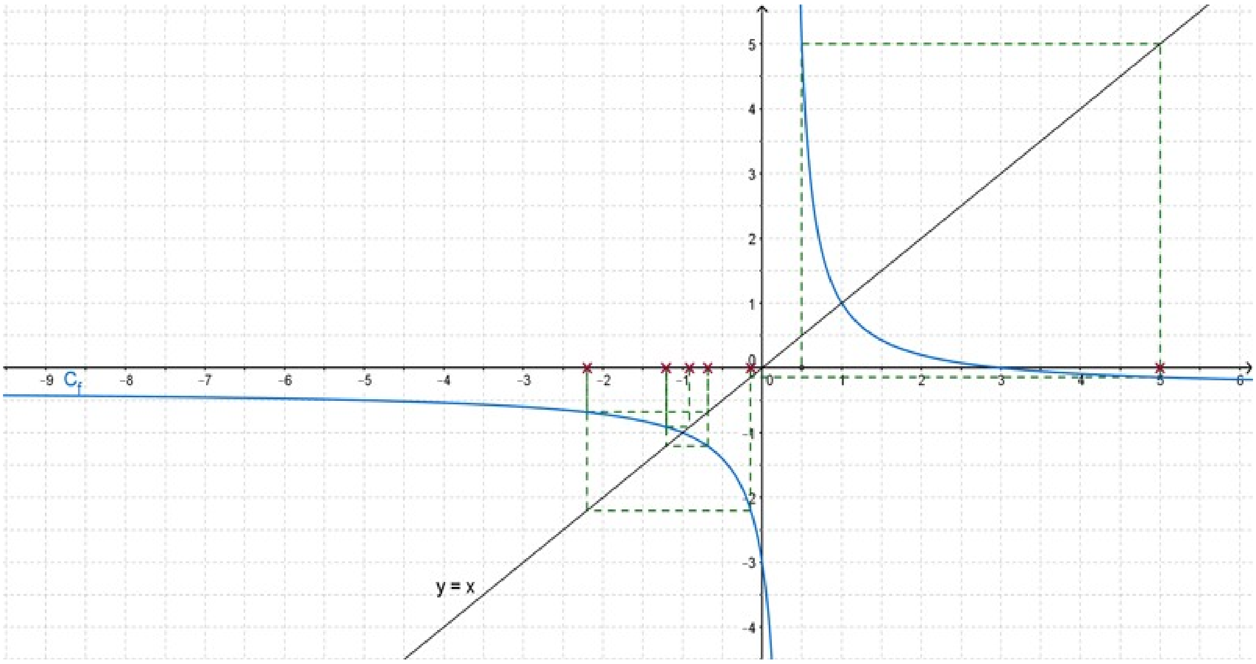
Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le raisonnement par récurrence : ∀ n ∈ ℕ, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 4

1.



2. a) $u_1=\dfrac{-u_0+3}{3u_0-1}=\dfrac{-0{,}5+3}{3\times0{,}5-1}=\dfrac{2{,}5}{0{,}5}=5$ et $u_2=\dfrac{-u_1+3}{3u_1-1}=\dfrac{-5+3}{3\times5-1}=\dfrac{-2}{14}=-\dfrac{1}{7}$.

b) • $u_1-u_0=5-0{,}5=4{,}5$ et $u_2-u_1=-\dfrac{1}{7}-5=-\dfrac{36}{7}$ donc $u_1-u_0\neq u_2-u_1$: (u_n) n'est pas arithmétique.

• $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{5}{0{,}5}=10$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{-\frac{1}{7}}{5}=-\dfrac{1}{35}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0}\neq\dfrac{u_2}{u_1}$: (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel n tel que $v_n=1$. Alors :
$\dfrac{u_n+1}{u_n-1}=1$ *ie* $u_n+1=u_n-1$ *ie* $1=-1$. Ceci est absurde.
D'où le résultat : $v_n\neq1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{-u_n+3}{3u_n-1}+1}{\dfrac{-u_n+3}{3u_n-1}-1}=\frac{-u_n+3+3u_n-1}{-u_n+3-3u_n+1}=\frac{2u_n+2}{-4u_n+4}=\frac{2(u_n+1)}{-4(u_n-1)}=-\frac{1}{2}v_n$$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ avec $v_0=\dfrac{u_0+1}{u_0-1}=\dfrac{0{,}5+1}{0{,}5-1}=\dfrac{1{,}5}{-0{,}5}=-3$, *ie* $v_n=-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Alors : $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}$ donc : $v_n(u_n-1)=u_n+1$ d'où : $v_nu_n-v_n=u_n+1$

$$u_n(v_n-1)=v_n+1$$
$$u_n=\frac{v_n+1}{v_n-1}.$$

Finalement : $u_n=\dfrac{-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}{-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}$.