Nom : .... **Prénom** : .... **T^le S**

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 1

MERCREDI 2 OCTOBRE 2019

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème (**note sur 30**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Chaque point sur 30 représente donc environ 0,7 point sur 20.

PRÉSENTATION & NOTATIONS

Résultats mal mis en valeur... très méchant sera le correcteur !

EXERCICE 1 7 points (2,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5)

On donne la suite (u_n) définie par $u_0=-5$ et $u_{n+1}=\frac{7}{3}u_n-4$.

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n-3$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n .

2. En déduire u_n en fonction de *n*.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1}-v_n=\frac{-32}{3}\times\left(\frac{7}{3}\right)^n$.

4. En déduire les variations de la suite (v_n), puis celles de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 10 points (5 + 5)

1. On considère un réel a tel que $a>0$.

Démontrer l'inégalité de (Jacob) Bernoulli :

$$\forall n\in\mathbb{N}, (1+a)^n\geqslant 1+na \text{ .}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ .}$$

EXERCICE 3 2 points

Calculer la somme suivante, en détaillant votre raisonnement : $\sum_{k=1}^{1985}(-2k+7)$.

EXERCICE 4 11 points (2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0{,}5$ et $u_{n+1}=\dfrac{-u_n+3}{3u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note également f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$ par $f(x)=\dfrac{-x+3}{3x-1}$.

1. Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$. Représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n).
Laisser les traits de construction.

2. a) Calculer u_1 et u_2.

b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

3. On admet que $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que $v_n \neq 1$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

c) En déduire v_n en fonction de n.
Utiliser ce résultat pour trouver l'expression de u_n en fonction de n.