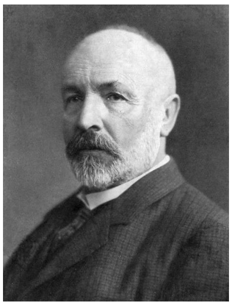
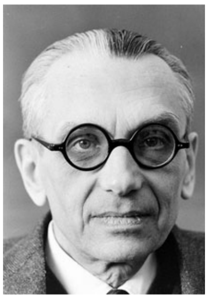
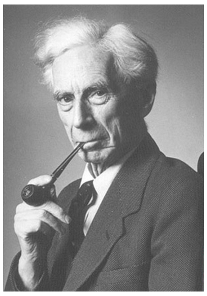
L'INFINI OU LES INFINIS ? VERS L'HYPOTHÈSE DU CONTINU...

« *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.* » [Blaise Pascal (1623-1662)]


G. Cantor


K. Gödel


B. Russel

Cet article constitue une infime quantité des notions présentées cette année sur l'infini au club maths lycée.

Lorsque nous sommes à l'école primaire, nous apprenons à compter et à écrire ces nouveaux nombres avec les 10 symboles (numération décimale) que sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
0, 1, 2, 3, 4, 5, … , 99, 100, 101, … , 999, 1 000, 1 001, … , 999 999, 1 000 000, 1 000 001, … , etc.
Nous pouvons continuer ainsi pendant longtemps… très longtemps… Il y a une **infinité d'entiers naturels**.
Nous noterons pour l'instant $\infty_{\mathbb{N}}$ cet infini (l'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$ et le symbole de l'infini est ∞ - il a été inventé par le mathématicien John Wallis en 1655, sa forme est similaire à la *lemniscate de Bernoulli*, une courbe plane ayant la forme d'un 8).

Mais cette notion d'infini n'est pas si facile à appréhender. Même tellement difficile qu'il faudra des millénaires aux mathématiciens pour arriver à « le faire » correctement : l'infini prendra réellement un statut rigoureux au XIX^{e} siècle avec l'immense Georg Cantor (né en Russie en 1845, mais habite en Allemagne dès ses 11 ans ; décès en 1918).

Question 1 : y a-t-il autant d'entiers naturels que d'entiers naturels pairs ?

Ces derniers sont : 0, 2, 4, 6, 8, 10, … , 98, 100, … , 998, 1000, etc.
Il y en a *bien sûr* une **infinité**...
Mais construisons ce qu'on appelle une *bijection* entre ces deux ensembles : à tout entier naturel *n*, j'associe l'entier naturel *2n*, qui est pair.

n	0	1	2	3	4	5	...	100	101	...	1 000	1 001	...	100 000	100 001	etc.
2n	0	2	4	6	8	10	...	200	202	...	2 000	2 002	...	200 000	200 002	etc.

Autrement dit, je peux « relier » chaque entier naturel *n* au nombre pair *2n*, et réciproquement je peux « relier » tout nombre pair *2n* à l'entier naturel *n* : il y a donc **autant d'entiers naturels que d'entiers naturels pairs !** Alors qu'intuitivement, il y a deux fois plus d'entiers naturels que d'entiers naturels pairs.

Question 2 : y a-t-il autant d'entiers naturels que d'entiers relatifs ?

Intuitivement, bien sûr que non ! Puisque les entiers relatifs sont composés des entiers naturels auxquels on ajoute les entiers négatifs… Et pourtant, voici une bijection entre ces deux ensembles :

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
...	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	...

Autrement dit, à tout entier naturel *n*, on associe l'entier *2n*, et à tout entier strictement négatif *n* on associe l'entier impair $-2n-1$. Et réciproquement…
On a donc ce résultat surprenant : $\infty_{\mathbb{N}} = \infty_{\mathbb{Z}}$.
De même, on pourrait montrer que $\infty_{\mathbb{N}}$ est égal à l'infini de l'ensemble des carrés, des cubes, etc.

Il semble donc qu'il existe un unique infini, que l'on appelle **infini dénombrable**, puisque tous les autres infinis peuvent se ramener à celui des entiers naturels (*dénombrable*). Mais l'infini regorge de surprises…

Question 3 : y a-t-il autant d'entiers naturels que de nombres réels ?

La réponse est NON, et ce fut découvert en 1891 par Georg Cantor : c'est l'argument de *la diagonale de Cantor*. Prenons une liste (quelconque) **dénombrable** de réels de l'intervalle [0 ;1] :

$r_1 = 0,\mathbf{0}\,1\,0\,5\,1\,1\,0\ldots$

$r_2 = 0,4\,\mathbf{1}\,3\,2\,0\,4\,3\ldots$

$r_3 = 0,8\,2\,\mathbf{4}\,5\,0\,2\,6\ldots$

$r_4 = 0,2\,3\,3\,\mathbf{0}\,1\,2\,6\ldots$

$r_5 = 0,4\,1\,0\,7\,\mathbf{2}\,4\,6\ldots$

$r_6 = 0,9\,9\,3\,7\,8\,\mathbf{1}\,8\ldots$

$r_7 = 0,0\,1\,0\,5\,1\,3\,\mathbf{0}\ldots$ etc.

Le nombre obtenu à partir de la diagonale est : 0,0140210…
En changeant chaque décimale par sa suivante, on construit alors le nombre : **0,1251321**…
Ce nombre ne peut être dans la liste ci-dessus, car il diffère de r_1 par sa première décimale, de r_2 par sa deuxième décimale, de r_3 par sa troisième décimale, etc.
Autrement dit, pour toute liste <u>dénombrable</u> de [0 ;1], on peut construire un réel de [0 ;1] qui n'est pas dans cette liste. Conclusion : $\infty_{[0;1]} > \infty_{\mathbb{N}}$.

Il est alors facile d'arriver à montrer que **l'infini des réels est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$** :

$$\infty_{\mathbb{R}} > \infty_{\mathbb{N}}.$$

Question 4 : y a-t-il un infini plus grand que celui des réels ?

Eh bien oui ! Avec le même type d'arguments que sa *diagonale*, Cantor démontra son théorème :

Si X est infini, on peut montrer que P(X) est strictement « plus grand » que X,
où P(X) est l'ensemble des sous-ensembles de X.

Pour mieux comprendre, commençons par travailler avec un ensemble X <u>fini</u> à trois éléments : $\{e_1 ;e_2 ;e_3\}$.
Pour construire l'ensemble P(X) des sous-ensembles de X, construisons un tableau en indiquant toutes les possibilités de choix :

e_1	e_2	e_3
oui	oui	oui
oui	oui	non
oui	non	oui
oui	non	non
non	oui	oui
non	oui	non
non	non	oui
non	non	non

L'ensemble P(X) contient alors 8 sous-ensembles :

- $\{e_1 ;e_2 ;e_3\}$ qui est X
- $\{e_1 ;e_2\}$
- $\{e_1 ;e_3\}$
- $\{e_1\}$
- $\{e_2 ;e_3\}$
- $\{e_2\}$
- $\{e_3\}$
- {} qui est l'ensemble vide, noté $\emptyset$

On observe bien que P(X) est strictement « plus grand » que X : 8 > 3.

Plus généralement, il est facile de montrer que l'ensemble P(X) d'un ensemble X fini à n éléments contient 2^n éléments, et on a bien $2^n > n$.
Prenons maintenant un ensemble X <u>infini dénombrable</u> : $\{e_1 ;e_2 ;e_3 ;e_4 ;e_5 ;\ldots\}$.

e_1	e_2	e_3	e_4	…
oui	oui	oui	oui	…
non	**non**	non	non	…
oui	oui	**oui**	non	…
oui	oui	non	**oui**	…
…	…	…	…	…

Numérotons alors ces lignes avec les éléments de X :

n° e_1

n° e_2

n° e_3

n° e_4

…

On prend alors la diagonale {oui ; non ; oui ; oui ; …} pour la changer en {non ; oui ; non ; non ; …}.
Ce nouvel ensemble n'est ni le n°e_1, ni le n°e_2, ni le n°e_3, ni le n°e_4, etc.
Autrement dit, en construisant P(X), on est certain de construire un sous-ensemble dont le numéro n'est pas dans la liste des éléments de X : P(X) est donc strictement plus grand que X !

Revenons à nos réels... **il y a un infini plus grand que celui des réels**, c'est celui de l'ensemble P(ℝ) des sous-ensembles des réels : $\infty_{P(\mathbb{R})} > \infty_{\mathbb{R}}$.

Question 5 : y a-t-il une infinité d'infinis ?

En continuant comme précédemment, on pourrait construire l'ensemble P(P(ℝ)), qui est l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble des sous-ensembles des réels… O_O
Bref, montrer que $\infty_{P(P(\mathbb{R}))} > \infty_{P(\mathbb{R})} > \infty_{\mathbb{R}}$.
Et ainsi de suite ! **Il y a donc une infinité d'infinis**. Aussi bizarre que cela puisse paraître.

Cet argument conduit d'ailleurs à ce qu'on appelle le *paradoxe de Russel*[1] : il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles… mais c'est une autre histoire.

Question 6 : $\infty_{\mathbb{N}} < \infty_{\mathbb{R}}$, mais existe-t-il un infini intermédiaire ?

Si je vous demande de compter *naturellement* entre 0 et 10, vous me direz « 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ».
L'infini des entiers naturels est appelé **infini dénombrable**, car on peut *dénombrer* ses éléments…

Si je vous demande maintenant de me donner tous les *réels* entre 0 et 10, vous serez bien embêté !
En effet, comment commencer ? « 0, puis.. » … Puis quoi ? 0,01 ? 0,001 ? 0,000000000001 ? …
C'est pourquoi l'ensemble des réels est souvent qualifié de **continu**.

Mais y a-t-il un infini intermédiaire entre le dénombrable et le continu ?
Penser que ce n'est pas le cas, c'est faire ce qu'on appelle **l'hypothèse du continu**.
C'est Cantor qui formula cette hypothèse. Pour des histoires de notations que je ne détaillerai pas ici, on note cela avec les lettres « aleph 0 » et « aleph 1 » :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 .$$

(on lit « deux exposant aleph-zéro est égal à aleph-un » : les alephs étant les cardinaux des ensembles infinis bien ordonnés…)

Cette question a longtemps torturé les mathématiciens ! Il faudra attendre 1963 pour avoir une réponse[2] :

1 Bertrand Russell (1872 – 1970 : mort à 97 ans) était un mathématicien, logicien, philosophe, homme politique et moraliste britannique.
Il écrivit des ouvrages philosophiques dans une langue simple et accessible, en vue de faire partager sa conception d'une philosophie rationaliste œuvrant pour la paix et l'amour. Il s'engagea dans de nombreuses polémiques, défendant des idées proches du socialisme de tendance libertaire et milita également contre toutes les formes de religion, considérant qu'elles sont des systèmes de cruauté inspirés par la peur et l'ignorance. Il organisa le tribunal Sartre-Russell contre les crimes commis pendant la guerre du Viêt Nam.
Son œuvre, qui comprend également des romans et des nouvelles, est couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, en particulier pour son engagement humaniste et comme libre penseur. Il deviendra membre du Parlement britannique.
En 1962, Russell joua un rôle public dans la crise des missiles de Cuba : dans un échange de télégrammes avec le dirigeant soviétique Khrouchtchev, qui lui assura que le gouvernement soviétique ne serait pas irréfléchi. Russell envoya par la suite ce télégramme au président Kennedy : « VOTRE ACTION DÉSESPÉRÉE. MENACE À LA SURVIE HUMAINE. AUCUNE JUSTIFICATION CONCEVABLE. L'HOMME CIVILISÉ LE CONDAMNE. NOUS N'AURONS PAS DE MASSACRE DE MASSE. ULTIMATUM SIGNIFIE GUERRE... METTEZ FIN À CETTE FOLIE »

2 Je simplifie ici un peu les théorème présentés; voir le théorème de Gödel pour ceux que ça intéresse, cela fera peut-être l'objet d'un article.

- le génial Kurt Gödel (je vous en reparlerai prochainement) a montré en 1938 qu'ajouter l'axiome « l'hypothèse du continu est vraie » à la théorie des ensembles[3] de conduit pas à une contradiction (c'est-à-dire démontrer à la fois une proposition et sa négation).

- en 1963, Paul Cohen montra qu'ajouter l'axiome « l'hypothèse du continu est fausse » à la théorie des ensembles ne conduit pas à une contradiction.

On dit que **cette hypothèse est indécidable dans le cadre de la théorie classique des ensembles** : chacun peut choisir s'il veut de cet infini intermédiaire, et cela ne changera rien au reste des mathématiques liées à cette théorie (c'est-à-dire une immense majorité des théorèmes actuels)…

Attention cependant, je n'ai pas dit que cette hypothèse n'était ni vraie ni fausse : elle doit bien être vraie ou fausse, mais dans la théorie que l'on utilise généralement pour faire des mathématiques et parler d'infini(s), on ne peut pas trancher… Il existe donc deux catégories de mathématiciens, qui font un choix :

Choix 1
Puisque actuellement aucune véritable contradiction n'est apparue avec la théorie classique des ensembles, on la garde et on choisit sans réel risque d'utiliser ou pas l'hypothèse du continu dans nos démonstrations.

Choix 2
On considère que la théorie classique des ensembles n'est pas assez satisfaisante, puisqu'elle ne permet pas de trancher sur une question aussi importante, et donc on rejette cette théorie - pour travailler dans une autre – ou on cherche à la compléter – en rajoutant des axiomes.
Diverses éventualités (théorie des types, théorie constructiviste des ensembles, théorie des ensembles avec ensemble universel, etc.) ont été proposées sans toutefois retenir vraiment l'attention des mathématiciens, qui restent attachés à la simplicité de la théorie classique, malgré cet énorme défaut !

Comme vous avez pu le voir, **la notion d'infini n'est pas si facile à appréhender**.
Dans un prochain article, je vous montrerai sur des exemples simples à quel point l’infini peut perturber notre intuition. En préparant ce club maths pour mes élèves, j'ai moi-même appris un théorème qui a alors bouleversé mon enseignement et mes connaissances mathématiques ! Comme disait Emile Cioran, « n'a de convictions que celui qui n'a rien approfondi ». Et c’est là toute la beauté des mathématiques : approfondir prend une vie.

C'est pourquoi je vous parlerai prochainement (entre autres) du ***théorème de ré-arrangement de Riemann***.

Johan Mathieu
Professeur de mathématiques

3 Il faudrait un article entier pour vous parler de cela... C'est la théorie majoritairement utilisée par les mathématiciens aujourd'hui.