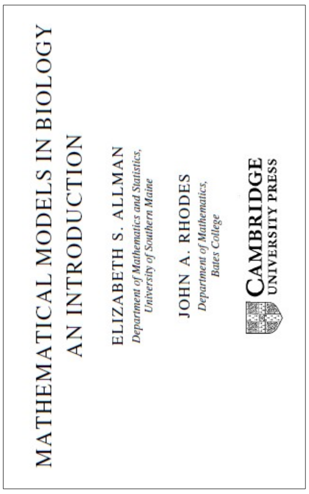
DYNAMIQUE D'UNE POPULATION D'ARBRES

Voici un extrait d'une publication, parue en 2003 chez *Cambridge University Press* :



Example. Suppose we are interested in a forest that is composed of two species of trees, with A_t and B_t denoting the number of each species in the forest in year t. When a tree dies, a new tree grows in its place, but the new tree might be of either species. To be concrete, suppose the species A trees are relatively long lived, with only 1% dying in any given year. On the other hand, 5% of the species B trees die. Because they are rapid growers, the B trees, however, are more likely to succeed in winning a vacant spot left by a dead tree; 75% of all vacant spots go to species B trees, and only 25% go to species A trees. All this can be expressed by

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= (.99 + (.25)(.01))A_t + (.25)(.05)B_t, \\ B_{t+1} &= (.75)(.01)A_t + (.95 + (.75)(.05))B_t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

After simplifying, the model is a system of two linear difference equations

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= .9925A_t + .0125B_t, \\ B_{t+1} &= .0075A_t + .9875B_t. \end{aligned}$$

In order to try to get numerical insight, suppose that we begin with a populations of $A_0 = 10$ and $B_0 = 990$. These initial population values might describe the forest if most of the A trees were selectively logged in the past.

What will happen to the populations over time?

1. a) Compléter (intuitivement) l'écriture suivante du système (2.1) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} & B_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t & B_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

La matrice ainsi complétée est une ***matrice carrée d'ordre 2***, que l'on note M.

b) Quelle définition viens-tu d'utiliser (sans le savoir) comme produit deux matrices ?

2. a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, essaie de démontrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix} \times M^n.$$

b) Quelles propriétés (à démontrer) manquent pour te permettre de terminer cette démonstration ?

3. a) A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur[1], donne l'état approximatif de la forêt dans :

10 ans ; 50 ans ; 500 ans ; 1000 ans.

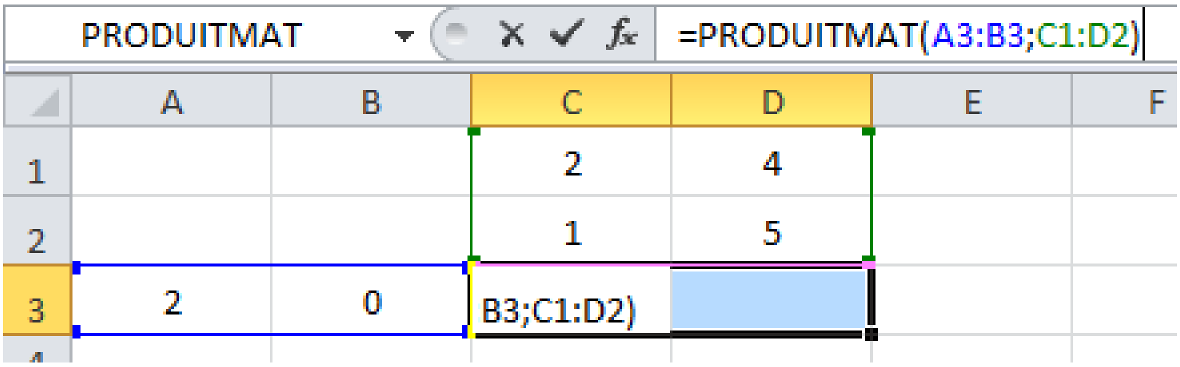
b) Change les valeurs A_0 et B_0 par des entiers naturels non nuls de ton choix et reprends la question a). Qu'observe-t-on ?

---

1 Voir aides page suivante

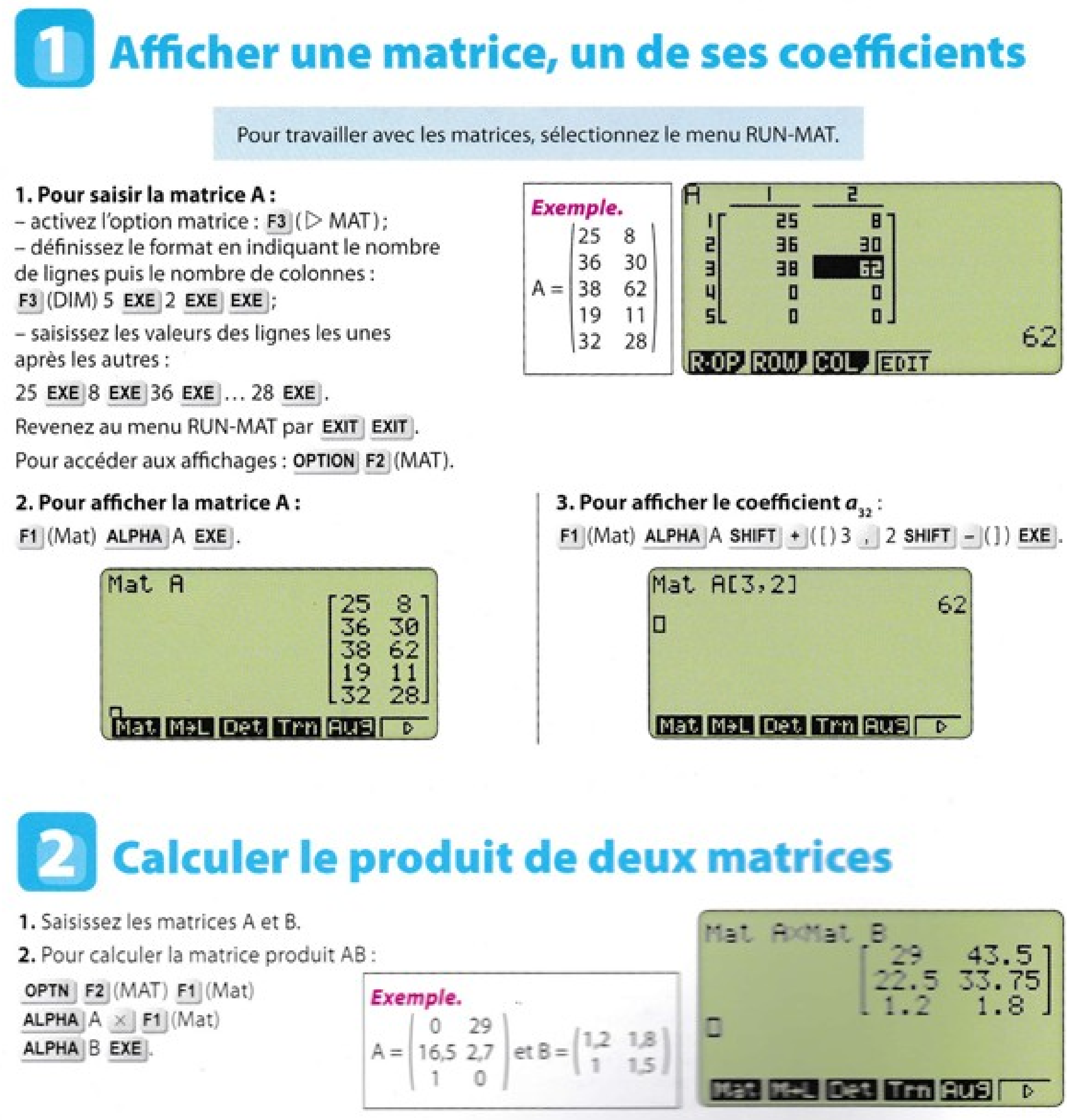
MULTIPLIER DEUX MATRICES AU TABLEUR ET À LA CALCULATRICE

AU TABLEUR



Sélectionner la plage C3:D3, rentrer la formule en utilisant PRODUITMAT
puis appuyer sur Ctrl+Maj+Entrée.

A LA CALCULATRICE CASIO GRAPH 35+



1 Afficher une matrice, un de ses coefficients

Pour travailler avec les matrices, sélectionnez le menu RUN-MAT.

1. Pour saisir la matrice A :
– activez l'option matrice : F3 (▷ MAT) ;
– définissez le format en indiquant le nombre de lignes puis le nombre de colonnes :
F3 (DIM) 5 EXE 2 EXE EXE ;
– saisissez les valeurs des lignes les unes après les autres :
25 EXE 8 EXE 36 EXE … 28 EXE.
Revenez au menu RUN-MAT par EXIT EXIT.
Pour accéder aux affichages : OPTION F2 (MAT).

Exemple.
$$A = \begin{pmatrix} 25 & 8 \\ 36 & 30 \\ 38 & 62 \\ 19 & 11 \\ 32 & 28 \end{pmatrix}$$

2. Pour afficher la matrice A :
F1 (Mat) ALPHA A EXE.

3. Pour afficher le coefficient a_{32} :
F1 (Mat) ALPHA A SHIFT + ([) 3 , 2 SHIFT − (]) EXE.

2 Calculer le produit de deux matrices

1. Saisissez les matrices A et B.
2. Pour calculer la matrice produit AB :
OPTN F2 (MAT) F1 (Mat)
ALPHA A × F1 (Mat)
ALPHA B EXE.

Exemple.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 29 \\ 16{,}5 & 2{,}7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 1{,}8 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Source : Transmath Term S spécialité (2012), éd. Nathan