TES : suites (révisions de 1ES)

Exercice 1

Un demandeur d'emploi se voit proposer deux offres :

- Un salaire initial de 1150 euros par mois et une augmentation de 5 % par mois.
  On note (a_n) la suite de ces revenus mensuels avec cette proposition.
- Un salaire initial de 1200 euros par mois et une augmentation de 3 % par mois. On note (b_n) la suite de ces revenus mensuels avec cette proposition.

1. Donner la nature et les élèments caractéristiques de chacune des suites (a_n) et (b_n).

2. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs des termes au centième près.

n	0	1	2	3	4
a_n					
b_n					

3. a. Au bout du 5[ième] mois, quelle est la proposition rendant le salaire le plus avantageux?

   b. A la vue de la somme reçue au terme des cinq mois, quelle est la proposition la plus avantageuse?

Correction 1

1. - Une augmentation de 5 % est associée à un coefficient multiplicateur de 1,05. Ainsi, les termes de la suite (a_n) vérifient la relation :
     $a_{n+1} = 1{,}05\times a_n$
     On en déduit que la suite (a_n) est la suite géométrique de premier terme 1 150 et de raison 1,03.
   - Une augmentation de 3 % est associée à un coefficient multiplicateur de 1,03. Ainsi, les termes de la suite (b_n) vérifient la relation :
     $b_{n+1} = 1{,}03\times b_n$
     On en déduit que la suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme 1 200 et de raison 1,03.

2. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4
a_n	1150	1207,5	1267,88	1331,27	1397,83
b_n	1200	1236	1273,08	1311,27	1350,61

3. a. Au bout du 5[ème] mois, le salaire sera plus avantageuse avec la première proposition.

   b. Voici le tableau complété avec en dernière colonne le total de salaire perçu sur les 5 mois :

n	0	1	2	3	4	Total
a_n	1150	1207,5	1267,88	1331,27	1397,83	6354,48
b_n	1200	1236	1273,08	1311,27	1350,61	6370,96

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$u_n = -8{\cdot}n^2 + 5{\cdot}n + 7$

1. Etablir que le terme de rang $n{+}1$ de la suite (u_n) admet pour expression :
   $u_{n+1} = -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4$

2. En étudiant la différence $u_{n+1}-u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction 2

1. Le terme de rang $n{+}1$ a pour expression :

$$u_{n+1} = -8{\cdot}\big(n+1\big)^2 + 5{\cdot}\big(n+1\big) + 7$$
$$= -8{\cdot}\big(n^2 + 2{\cdot}n + 1\big) + 5{\cdot}n + 5 + 7$$
$$= -8{\cdot}n^2 - 16{\cdot}n - 8 + 5{\cdot}n + 5 + 7 = -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4$$

2. Etudions la différence $u_{n+1}-u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :
   $$u_{n+1} - u_n = \big(-8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4\big) - \big(-8{\cdot}n^2 + 5{\cdot}n + 7\big)$$
   $$= -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4 + 8{\cdot}n^2 - 5{\cdot}n - 7 = -16{\cdot}n - 3$$
   Pour tout entier n positif ou nul, on a :
   $-16{\cdot}n - 3 \leqslant 0$
   $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
   $u_{n+1} \leqslant u_n$
   On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 3

Pour chaque question, déterminer, en étudiant la différence $u_{n+1}-u_n$, le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = 3n^2 + n + 1$

b. $u_n = 2^n + 3n - 1$

c. $u_{n+1} = u_n + 2n + 1\ ;\ u_0 = -2$

d. $u_{n+1} = u_n - n + 5\ ;\ u_0 = 2$

Correction 3

1. $$u_{n+1} - u_n = 3(n+1)^2 + (n+1) + 1 - \big(3n^2 + n + 1\big)$$
   $$= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 + 1 - 3n^2 - n - 1$$
   $$= 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 + 1 - 3n^2 - n - 1 = 6n + 4$$
   Cette différence est strictement positive sur $\mathbb{N}$: on en déduit que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 3(n+1) - 1 - \big(2^n + 3n - 1\big)$$
   $$= 2^{n+1} + 3\ n + 3 - 1 - 2^n - 3n + 1 = 2^{n+1} - 2^n + 3$$
   $$= 2^n\big(2-1\big) + 3 = 2^n + 3$$
   La diffférence de deux termes consécutives est toujours positive : la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 1 - u_n = 2n + 1$

n étant un entier naturel, on en déduit que la différence de deux termes consécutives est positive : la suite (u_n) est croissante.

4. $u_{n+1} - u_n = u_n - n + 5 - u_n = -n + 5$

Pour $n \geqslant 5$, cette différence est négative ou nulle, on en déduit que la suite est décroissante à partir du rang 5.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :

$$u_n = \frac{n+3}{n+1}$$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. a. Etablir l'identité pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Correction 4

1. Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = \frac{0+3}{0+1} = \frac{3}{1} = 3$
- $u_1 = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$
- $u_2 = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$
- $u_3 = \frac{3+3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. a. Le terme de rang $n+1$ s'exprime par :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{n+4}{n+2}$$

La différence des deux termes u_n et u_{n+1} s'exprime par :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{(n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + n + 4{\cdot}n + 4}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2 + 2{\cdot}n + 3{\cdot}n + 6}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 5{\cdot}n + 4}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2 + 5{\cdot}n + 6}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 5{\cdot}n + 4 - (n^2 + 5{\cdot}n + 6)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 5{\cdot}n + 4 - n^2 - 5{\cdot}n - 6}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

b. Pour tout entier n positif ou nul, le dénominateur est strictement positif. On en déduit le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5

Rappels :

Pour tous nombres réels a et b et pour tous enties relatifs n et m, on a :

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $(b \neq 0)$

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (u_n) est strictement décroissante.

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) est strictement croissante.

Correction 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Tous les termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (v_n) :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{4} \times \frac{4}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction 6

1. Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :
   - $u_0 = 5$
   - $u_1 = u_0 + 2 = 5 + 2 = 7$
   - $u_2 = u_1 + 2 = 7 + 2 = 9$
   - $u_3 = u_2 + 2 = 9 + 2 = 11$
2. La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :
   $u_n = u_0 + n{\cdot}r = 5 + 2{\cdot}n$
3. Etudions la différence de deux termes consécutifs :
   $u_{n+1} - u_n = \big(5 + (n+1){\cdot}2\big) - \big(5 + n{\cdot}2\big)$
   $= 5 + 2{\cdot}n + 2 - 5 - 2{\cdot}n = 2 > 0$
   On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 7

Une entreprise décide de rentrer en bourse. Lors de son entrée en bourse, le prix d'une action est de 50 €.
Elle espère que le prix de son action augmente de 5 % par an.

On note u_0 le prix de l'action lors de son entrée en bourse et u_n, pour tout entier n strictement positif, le prix de l'action au bout de n années.

1. Donner la nature et les élèments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang n de la suite (u_n).
   b. Donner le prix de de l'action au bout de 10 ans
3. a. Donner le sens de variation de la suite (u_n). Justifier votre réponse.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le prix de l'action dépassera 100 €.

Correction 7

1. Une augmentation de 5 % est associée à un coefficient multiplicateur de :
   $k = 1 + \dfrac{5}{100} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$
   Ainsi, pour appliquer l'augmentation sur le prix de l'action d'une année à l'autre, il suffit de multiplier par 1,05. Ceci se traduit par :
   $u_{n+1} = 1{,}05{\times}u_n$
   Le premier terme de la suite (u_n) ayant pour valuer 50, on en déduit que la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 50 et de raison 1,05.
2. a. La formule explicite donnant la valeur du terme de rang n de la suite (u_n) de premier terme 50 et de raison 1,05 a pour expression :
   $u_n = u_0{\times}q^n$
   $u_n = 50{\times}1{,}05^n$
   b. Au bout de 10 ans le prix de l'action sera de :
   $u_{10} = 50{\times}1{,}05^{10}$
   $u_{10} \approx 81{,}4447 \approx 81{,}44$ €
3. a. La suite (u_n) étant une suite géométrique dont la raison vérifie la comparaison :
   $1{,}05 > 1$
   on en déduit que la suite (u_n) est croissante.
   b. A l'aide de la calculatrice, on génère l'ensemble des termes de la calculatrice.
   On observe alors le premier terme de la suite ayant une valeur supérieure ou égale à 100 :

n	u(n)			
12	89.793			
13	94.282			
14	98.997			
15	103.95			
16	109.14			
17	114.6			
18	120.33			
19	126.35			
20	132.66			
21	139.3			
22	146.26			

n=15

   On remarque que c'est à partir du rang 15 que le terme de la suite (u_n) aura une valeur supérieure à 100.
   C'est au bout de 15 ans que l'action aura un prix supérieur à 100 euros.

Exercice 8

> L'indice de référence des loyers *(IRL)* sert de base pour réviser les loyers des logements vides ou meublés. Il fixe les plafonds des augmentations annuelles des loyers que peuvent exiger les propriétaires.

Source : http://service-public.fr

Un logement est loué en 2018 pour un loyer de 814 € et dont l'augmentation est fixé à 0,5 % par an. On note u_n le montant du loyer à l'année 2018+n.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_b).
2. a. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction n.
   b. Déterminer le montant du loyer en 2030.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année pour laquelle le loyer dépasse pour la première fois 900 €.

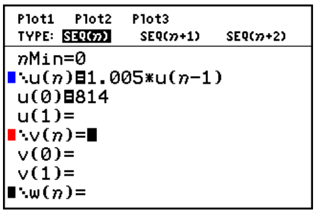
Correction 8

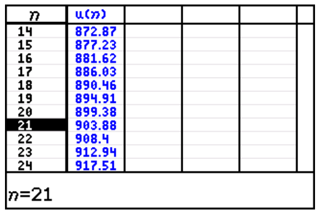
1. Une augmentation de 0,5 % est une évolution dont le taux a pour valeur :
   $t = \dfrac{p}{100} = \dfrac{0{,}5}{100} = 0{,}005$
   Le coefficient multiplicateur associé à cette évoluation a pour valeur :
   $k = 1 + t = 1 + 0{,}005 = 1{,}005$
   Ainsi, un terme et son successeur de la suite (u_n) vérifient la relation :
   $u_{n+1} = 1{,}005{\cdot}u_n$
   On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,005 et de premier terme :
   $u_0 = 814$
2. a. La suite (u_n) est géométrique de premier terme 814 et de raison 1,005. Ainsi, le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :
   $u_n = 814{\times}1{,}005^n$

b. En remarquant que 2018+12=2030, le montant du loyer en 2030 sera de :

$u_{12} = 814 \times 1{,}005^{12} \approx 864{,}2057 \approx 864{,}21$ €.

3. Voici des captures d'écran de la calculatrice :





On en déduit que le loyer dépassera la somme de 900 € en 2039 *(=2018+21)*.