MATRICES

1.1 Définitions

Définition 1

- Une **matrice de format** (n, p) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont les **coefficients** de la matrice.
- Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}.

Le premier indice est toujours le numéro de la ligne, et le deuxième celui de la colonne.

Exemples. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de format (2, 3).

$a_{13} = 0$ (ligne 1, colonne 3) ; $a_{22} = 3$. (ligne 2, colonne 2)

Matrices particulières. Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** ; si $p = 1$, A est une **matrice colonne** ; si $n = p$, A est une **matrice carrée**.

Si tous les coefficients de A sont nuls, A est une **matrice nulle**.

Définition 2

Dire que deux matrices sont **égales** signifie qu'elles ont le même format, et les mêmes coefficients aux mêmes emplacements.

Exemples. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 2{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0{,}4 & 2{,}2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Définition 3

La **matrice transposée** d'une matrice A de format (n, p) est la matrice de format (p, n), notée $\mathbf{A^T}$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2 Addition de deux matrices de même format

Définition 4

On appelle **somme** de deux matrices de **même format** la matrice obtenue en additionnant les coefficients de **même emplacement**.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Théorème 1

A, B, et C sont des matrices de même format. O est la matrice nulle de même format.

1. A + B = B + A.
2. A + (B + C) = (A + B) + C.
3. A + O = O + A = A.

On écrira donc A + B + C.

Parmi les matrices de format donné, la matrice nulle joue pour l'addition le même rôle que le nombre 0 pour l'addition des nombres.

Démonstration. Pour un emplacement quelconque (repéré par son numéro de ligne et son numéro de colonne), appelons a le coefficient dans A, b le coefficient dans B, c le coefficient dans C. Les propriétés résultent respectivement des égalités :

$$a + b = b + a ; \quad (a + b) + c = a + (b + c) ; \quad a + 0 = 0 + a = a.$$

1.3 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition 5 On appelle **produit d'une matrice par un nombre réel** la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients par ce nombre.

Exemple. $-2 \times \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 2 M et M′ sont deux matrices de même format. O est la matrice nulle de même format.

1. $0M = O$ et $1M = M$.

2. α et β sont deux nombres.

- $(\alpha + \beta)M = \alpha M + \beta M$
- $\alpha(M + M') = \alpha M + \alpha M'$

Pour l'addition des matrices, et la multiplication d'une matrice par un nombre, les règles de calcul sont analogues à celles sur les nombres.

Définition 6 On appelle **opposée de M** la matrice $(-1)M$, notée $-M$, et on note $A - B$ la matrice $A + (-B)$.

Conséquences. $M - M$ est la matrice nulle, et l'égalité $M + A = B$ équivaut à l'égalité $M = B - A$.

1.4 Multiplication de deux matrices

Définition 7

- Le produit de la matrice ligne $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ par la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est le nombre $LC = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p = \sum_{k=1}^{p} a_kb_k$.
- Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de format (n, p) par une matrice $B = (b_{ij})$ de format (p, q) est la matrice, notée AB, de format (n, q) dont le coefficient c_{ij} est le produit de la matrice ligne i de A par la matrice colonne j de B : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

La règle concernant les formats peut être schématisée par $(n, p) \times (p, q) = (n, q)$.

Disposition pratique : un exemple.

Pour $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 5 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$,

on procède comme ci-contre.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -19 & 5 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$c_{11} = 1 \times 1 + (-5) \times 4 + 0 \times (-2)$

$c_{22} = 2 \times 0 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3)$

Remarque. Si les matrices AB et BA sont définies, **en général, AB n'est pas égale à BA.**

Théorème 3 (admis) A, B, C sont des matrices dont les formats permettent les calculs indiqués. k désigne un nombre.

1. $A(BC) = (AB)C$. **2.** $A(B + C) = AB + AC$.

3. $(A + B)C = AC + BC$. **4.** $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

On écrira donc ABC.

On écrira donc kAB.

Attention. Lorsque les produits utilisés sont définis : si $A = O$ ou $B = O$, alors $AB = O$.
Mais **la réciproque est fausse** : $AB = O$ peut être vérifié sans que $A = O$ ou $B = O$.
Ainsi l'égalité $AM = AN$ peut être vérifiée sans que $M = N$.

2.1 Matrices carrées et matrices unités

Définition 8

d est un entier naturel non nul.

- On appelle **matrice carrée d'ordre *d*** toute matrice de format (d, d).
- On appelle **matrice unité d'ordre *d*** la matrice I, carrée d'ordre *d*, dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1.

Exemple. La matrice unité d'ordre 3 est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4

1. Pour toute matrice M carrée d'ordre *d*, $IM = MI = M$.

2. Pour toute matrice colonne C de format $(d, 1)$, $IC = C$.

3. Pour toute matrice ligne L de format $(1, d)$, $LI = L$.

La matrice unité joue pour la multiplication (lorsqu'elle est définie) le même rôle que le nombre 1 pour la multiplication des nombres.

2.2 Puissance d'une matrice carrée

Définition 9

n est un entier naturel non nul et A est une matrice carrée. La **puissance *n*-ième** de la matrice A, notée A^n, est la matrice définie par $\mathbf{A^n = \underbrace{AA \ldots\ldots A}_{n \text{ fois}}}$.

Par convention, $\mathbf{A^0 = I}$.

Théorème 5

Pour tout naturel *n* non nul et pour tous nombres *a* et *b*, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Généralisation aux matrices diagonales. Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les seuls coefficients non nuls (s'ils existent) sont situés sur la diagonale principale. Le théorème 5 se généralise à toute matrice diagonale.

2.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition 10

A est une matrice carrée d'ordre *d*. On dit qu'une matrice B, carrée d'ordre *d*, est **inverse** de A si elle vérifie $AB = I$ et $BA = I$.

L'idée est la même que pour les nombres : dire que 0,5 et 2 sont inverses, c'est dire que $0{,}5 \times 2 = 2 \times 0{,}5 = 1$.

Théorème 6

Si la matrice carrée A admet une matrice inverse, celle-ci est unique. On la note $\mathbf{A^{-1}}$.

Démonstration. Si deux matrices B et B′ vérifient $AB = I$, $BA = I$, $AB' = I$, $B'A = I$, alors on peut écrire : $B'(AB) = B'I$. D'où par le théorème 3, $(B'A)B = B'$, donc $IB = B'$ et $B = B'$.

Attention. Tout nombre *a* non nul admet un inverse a^{-1}. Cette affirmation ne se généralise pas aux matrices (voir l'exemple du théorème 7).

Théorème 7

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

1. Si $ad - bc \neq 0$, A admet une inverse $\mathbf{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

2. Si $ad - bc = 0$, A n'a pas d'inverse.

Le nombre $ad - bc$ s'appelle le **déterminant** de A.

Démonstration. 1. Posons $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$AB = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

On utilise la propriété 4 énoncée dans le théorème 3.

De même, on montre que $BA = \mathrm{I}$.

2. Pour cette démonstration, voir l'exercice 46, p. 133.

Exemples. • $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$: $ad - bc = 1 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

• $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $ad - bc = 0$, donc J n'a pas d'inverse.

Théorème 8

A, M et N sont des matrices carrées de même ordre. O est la matrice nulle de même ordre.
On suppose que A est inversible.

• Si AM = O, alors M = O. • Si AM = AN, alors M = N.

Démonstration. On multiplie chaque membre des égalités supposées par A^{-1} à gauche.

2.4 Écriture matricielle d'un système linéaire

• Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** x et y est de la forme :

$$(S)\ \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, d, e \text{ et } f \text{ sont des nombres.}$$

Les solutions de ce système sont les couples $(x ; y)$ vérifiant **simultanément** ces deux équations.

• En considérant les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit : **AX = B**. Dans cette **écriture matricielle**, A est la **matrice associée** au système (S). Les deux équations linéaires se sont transformées en une (seule) équation matricielle, d'inconnue X. Avec ces notations :

Théorème 9

Si A est inversible, alors (S) admet un unique couple solution défini par $\mathbf{X = A^{-1}B}$.

Démonstration. Si AX = B et si A est inversible, alors $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ et par le théorème 3, $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ donc $\mathrm{I}X = A^{-1}B$ c'est-à-dire $X = A^{-1}B$.

Le théorème 9 se généralise aux cas des systèmes de n équations linéaires à n inconnues, pour tout naturel $n \geqslant 2$.

Exemple. On considère le système (S) $\begin{cases} -x + 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$, dont l'écriture matricielle est AX = B avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A, $-1 \times 2 - 4 \times 3 = -14$, est différent de 0, donc d'après le théorème 7, la matrice A est inversible. D'après le théorème 9, il existe un unique couple solution défini par $X = A^{-1}B$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-14}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Remarque. On admet que si la matrice associée au système n'est pas inversible, alors l'ensemble des solutions est soit vide, soit contient une infinité de solutions.

Source : Transmath Term S spécialité, éd. Nathan (programme 2012)

Ajouter ou multiplier des matrices par un réel

ÉNONCÉ On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculer $5A + 3B$ à la main. Vérifier en effectuant le calcul avec calculatrice ou logiciel.

SOLUTION

À la main : $5A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 20 & 0 & 15 \\ -10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ et $3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 6 & 18 & -6 \\ 9 & 15 & -12 \end{pmatrix}$ donc $5A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 26 & 18 & 9 \\ -1 & 30 & -2 \end{pmatrix}$. On vérifie avec des outils TICE.

Sur TI-83 (ou TI-83 Premium CE)

- Entrer la matrice A en [A] :

Taper [2nde] [x^{-1}] (ou [matrice]) et choisir EDIT

Valider le choix 1 : [A] puis régler le format à 3×3 :

```
MATRICE[A] 3 ×3
```

Entrer les coefficients un par un en validant par [entrer] après chacun.

- Entrer de même la matrice B en [B].
- Taper

[5] [*] [2nde] [x^{-1}] [1] [+] [3] [×] [2nde] [x^{-1}] [2]

```
5*[A]+3*[B]
        [7   4  15]
        [26  18  9]
        [-1  30 -2]
```

Sur Casio Graph 35+

- Entrer la matrice A : dans le menu RUN MATH, choisir ▶MAT par [F3], sélectionner Mat A puis par [F3] choisir DIM et entrer le format :

```
m  :3
n  :3
```

Enter les coefficients en validant chacun par EXE.

- Entrer de même la matrice B.
- Taper le calcul ci-dessous, Mat s'obtenant par [OPTN] choix [F2] (MAT) puis [F1] (Mat).

```
5×Mat A+3×Mat B
        [7   4  15]
        [26  18  9]
        [-1  30 -2]
```

Sur Xcas

```
1 A:=[[2,-1,0],[4,0,3],[-2,3,2]]
   [2, -1, 0
    4,  0, 3
   -2,  3, 2]
2 B:=[[-1,3,5],[2,6,-2],[3,5,-4]]
   [-1, 3,  5
     2, 6, -2
     3, 5, -4]
3 5*A+3*B
   [7,  4,  15
    26, 18, 9
    -1, 30, -2]
```

Sur Scilab

```
-->A=[2,-1,0;4,0,3;-2,3,2]
 A  =

    2.  - 1.    0.
    4.    0.    3.
  - 2.    3.    2.

-->B=[-1,3,5;2,6,-2;3,5,-4]
 B  =

  - 1.    3.    5.
    2.    6.  - 2.
    3.    5.  - 4.

-->5*A+3*B
 ans  =

    7.     4.     15.
    26.    18.    9.
  - 1.     30.  - 2.
```

Source : Math'x Term S spécialité, éd. didier (programme 2012)