Nom : .......................................................... **Prénom** : ..................................................

**RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE**

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

# MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées.

## **EXERCICE 1** [4 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

*Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

**1.** On considère la droite $\Delta_1$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-3t \\ y=4+2t \\ z=t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

ainsi que la droite $\Delta_2$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-4+s \\ y=2+2s \\ z=-1+s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$.

**a.** Les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont parallèles.

**b.** Les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont orthogonales.

**c.** Les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont sécantes.

**2.** On considère la droite $d$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=1+2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, et le plan $P$ d'équation cartésienne : $4x+2y-z+3=0$.

**a.** La droite $d$ est incluse dans le plan $P$.

**b.** La droite $d$ est parallèle strictement au plan $P$.

**c.** La droite $d$ est sécante au plan $P$.

**3.** On considère les points $\mathrm{A}(3;2;1)$, $\mathrm{B}(7;3;1)$, $\mathrm{C}(-1;4;5)$ et $\mathrm{D}(-3;3;5)$.

**a.** Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

**b.** Les points A, B et C sont alignés.

**c.** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

**4.** On considère les plans $Q$ et $Q'$ d'équation cartésienne respective $3x-2y+z+1=0$ et $4x+y-z+3=0$.

**a.** Le point $\mathrm{R}(1;1;-2)$ appartient aux deux plans.

**b.** Les deux plans sont perpendiculaires.

**c.** Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=7t+4 \\ z=11t+7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

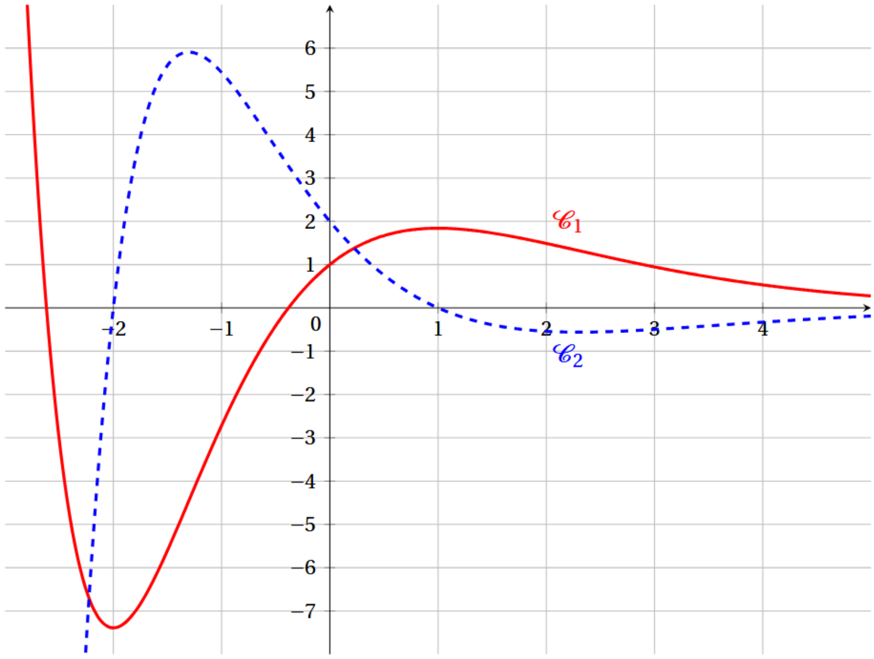
## **EXERCICE 2** [6 points]

*La partie C est indépendante des parties A et B.*

**Partie A**

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera $g$ et $g'$. On précise également que :

- La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;1)$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2;0)$ et $(1;0)$.




**1.** En justifiant, associer à chacune des fonctions $g$ et $g'$ sa représentation graphique.

**2.** Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$ au point d'abscisse 0 est $y=2x+1$.

**Partie B**

On considère (E ) l'équation différentielle $y+y'=(2x+3)\mathrm{e}^{-x}$, où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$.

**1.** Montrer que la fonction $f_0$ définie pour tout nombre réel $x$ par $f_0(x)=(x^2+3x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

**2.** Résoudre l'équation différentielle ($E_0$) : $y+y'=0$.

**3.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

**4.** On admet que la fonction $g$ décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction $g$.

**5.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

**Partie C**

On considère la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ par : $f(x)=(x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

**1.** Démontrer que la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**a.** Vérifier que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x)=(-x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

**b.** Déterminer le signe de la fonction dérivée $f'$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Expliquer pourquoi la fonction $f$ est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

**4.** On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel $x$ par $\mathrm{F}(x)=(-x^2-5x-7)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $f$.

Soit $\alpha$ un nombre réel positif. Déterminer l'aire $\mathrm{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

## EXERCICE 3 [5 points]

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

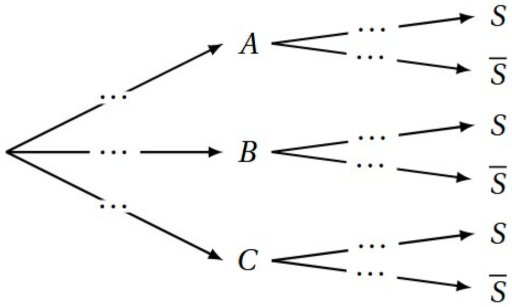
**Partie A**

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{\mathrm{S}}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.




**2.** Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

**3.** Calculer la probabilité $P(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**4.** Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S)=0,855$.

**5.** On suppose désormais que la connexion est stable.

Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième.

**Partie B**

D'après la partie A, la probabilité qu'une connexion soit instable est égale à 0,145.

**1.** Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

**a.** Démontrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, puis préciser ses paramètres.

**b.** Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. On donnera la valeur arrondie au millième.

**2.** Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de $n$ connexions, toujours dans les mêmes conditions, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif. On note $X_n$ la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que $X_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et 0,145.

**a.** Donner l'expression en fonction de $n$ de la probabilité $p_n$ qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

**b.** Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ telle que la probabilité $p_n$ est supérieure ou égale à 0,99.

## EXERCICE 4 [5 points]

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1}=2+\ln(u_n^2-3)$.

On admet que cette suite est bien définie.

**Partie A : Exploitation de programmes Python**

**1.** Recopier et compléter le script Python ci-contre pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des `k` premières valeurs de la suite $(u_n)$.

Remarque : on précise que, pour tout réel strictement positif $a$, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de $a$.

```
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(......):
        L.append(u)
        u=......
    return(......)
```

**2.** On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite $(u_n)$ et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642 ]
```

**3.** On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1. Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite $(u_n)$ ? Justifier.

```
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

**Partie B : Étude de la convergence de la suite $(u_n)$**

On considère la fonction g définie sur $[2;+\infty[$ par : $g(x)=2+\ln(x^2-3)$.

On admet que $g$ est dérivable sur $[2;+\infty[$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** Démontrer que la fonction $g$ est croissante sur $[2;+\infty[$.

**2. a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ : $4\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 6$.

**b.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

**Partie C : Étude de la valeur de la limite**

On considère la fonction $f$ définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x)=2+\ln(x^2-3)-x$.

On admet que $f$ est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

On donne le tableau de variations de $f$ suivant. On ne demande aucune justification.

| $x$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\ln(6)-1$ | $-\infty$ |

**1. a.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;+\infty[$ que l'on notera $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$.

**b.** Donner la valeur exacte de $\alpha$ et une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\beta$.

**2.** On note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Justifier que $f(\ell)=0$ et déterminer $\ell$.