

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUESDurée : 40 minutes. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.**EXERCICE 1**

≈ 5 minutes

1. On considère les matrices suivantes : $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $P = C D$ et $P = (p_{i,j})$. Calculer (en détaillant) le coefficient $p_{2,2}$.

2. Écrire la matrice $(h_{i,j})$ de dimension 4×5 définie par $h_{i,j} = i - 2j$ si i est pair, $-j$ sinon.

EXERCICE 2

≈ 5 minutes

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^2 = -15I_3 + 8A$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Démontrer que A est inversible et déterminer l'inverse de A , noté A^{-1} .

EXERCICE 3

≈ 5 minutes

Démontrer que la multiplication matricielle est distributive : $A(B+C) = AB + AC$.

EXERCICE 4

≈ 20 minutes

On définit les deux suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{4}y_n + 2 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + 3 \end{cases}.$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ on a donc $U_{n+1} = A U_n + B$ avec $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On cherche une matrice colonne C telle que $C = AC + B$. Déterminer l'unique matrice C vérifiant cela.

2. Par la suite, on admettra que : $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. On pose, pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - C$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = A V_n$.

3. On note $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on admet que : $P^{-1} = P$.

On admet que :

- $A = PDP^{-1}$ et pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = A^n V_0$

- $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$

a. Déterminer l'expression de A^n et en déduire x_n et y_n en fonction de n uniquement.

b. Vérifier que $x_n = -\frac{18}{2^n} + \frac{9}{4^n} + 10$ pour tout entier naturel n .