Nom : **Prénom** : **Classe** : T$^{\text{le}}$SM

le 26 / 03 / 2025

Note :

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure 35 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 15 min

1. Simplifier, en détaillant rigoureusement, le calcul suivant : $\ln\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3\right)+\ln\left(\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3\right)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(x+3)+\ln(x+1)<2\ln(x-2)$.

EXERCICE 2 ≈ 20 min *Tiré d'un exercice de baccalauréat*

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac : on gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne. On admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à trois septièmes.

Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

3. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant 5)$ en arrondissant au dix-millième.

4. Déterminer le plus petit entier naturel K tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant K)\geqslant 0{,}9$.

5. En justifiant rigoureusement à l'aide d'une inéquation, déterminer le nombre minimal n de joueurs nécessaires pour que la probabilité que l'un d'eux au moins gagne soit supérieure ou égale à 99,85 %.

EXERCICE 3 ≈ 10 min

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On note I et J les milieux respectifs de [AE] et [BC].

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner, sans justifier les coordonnées de H, I et J.

2. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ à l'aide de l'expression analytique du produit scalaire.

3. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de la mesure de l'angle ($\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}$).

→

EXERCICE 4 ≈ 50 min *Tiré d'un exercice de baccalauréat*

Les parties B et C sont indépendantes.

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=x-x\ln x$.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers 0.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers +∞.

3. a. Démontrer que la fonction *f* est dérivable sur]0 ; +∞[.

b. Déterminer les variations de la fonction *f* sur]0 ; +∞[et dresser son tableau de variations.

4. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur]0 ; +∞[.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0{,}5$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n* : $0{,}5\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel que l'on notera ℓ.

b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

Partie C ← ≈ 1 point sur 20

Pour tout réel *k* quelconque, on considère la fonction f_k définie sur]0 ; +∞[par : $f_k(x)=kx-x\ln x$.

On admet que cette fonction est dérivable sur]0 ; +∞[.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel *k*, f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k=\mathrm{e}^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel *k* : $x_k=y_k$.

Approfondissement (à faire à la maison)

On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre réel *k* par : $v_{n+1}=f_k(v_n)$ pour tout entier naturel *n*.

1. Démontrer que pour tout nombre réel *k* : si $0<v_0<\mathrm{e}^{k-1}$ alors, pour tout entier naturel *n* : $0<v_n<v_{n+1}<\mathrm{e}^{k-1}$.

2. En déduire que pour tout nombre réel *k* : (v_n) converge vers e^{k-1}.