Nom : **Prénom** : **Classe** : T[le]OME

le vendredi 31 janvier 2025

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 < 5 minutes

Démontrer que pour tout couple $(a;b)$ d'entiers naturels : $(a+b)^3 \equiv a^3+b^3$ [3].

EXERCICE 2 ≈ 5 minutes

Sans utiliser un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, 6 divise $n(n^2+5)$.

EXERCICE 3 < 20 minutes

1. Démontrer que pour tout entier relatif x : si x^2 est congru à 1 modulo 8, alors x est impair.

2. a. Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 = 8y+1$. Démontrer que : $\exists\, k \in \mathbb{Z}$, $y = \dfrac{k^2+k}{2}$.

b. En déduire l'ensemble solution, noté S, de l'équation $x^2 = 8y+1$, où $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.

EXERCICE 4 < 10 minutes

L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Par l'absurde, supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$.

Quitte à simplifier, on suppose cette fraction irréductible.

1. Compléter les tableaux de congruences suivants, sans justifier.

$a \equiv \ldots$ [5]	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv \ldots$ [5]					

$b \equiv \ldots$ [5]	0	1	2	3	4
$b^2 \equiv \ldots$ [5]					
$3b^2 \equiv \ldots$ [5]					

2. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 5 < 20 minutes

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $U_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

1. Démontrer que : $3^{n+3} \equiv (-1)^{n+1} \times 2^{3n+9}$ [11].

2. En déduire que : $U_n \equiv 2^{3n+9}\left((-1)^{n+1} - 2^{5(n-1)}\right)$ [11].

3. En déduire que U_n est divisible par 11.