Nom : .... Prénom : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées.

EXERCICE 1 [6 points]

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

b. Dresser, en justifiant, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.

5. a. Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 2 [3 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandée.

Pour répondre, indiquer sur la copie <u>le numéro</u> de la question, <u>la lettre</u> de la réponse choisie <u>et la réponse choisie</u>.

1. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\dfrac{1+2^n}{3+5^n}$. Cette suite :

A. diverge vers $+\infty$ **B.** converge vers $\dfrac{2}{5}$ **C.** converge vers 0 **D.** converge vers $\dfrac{1}{3}$

2. L'unique fonction f telle que $f(0)=1$ et, pour tout réel x, $f'(x)=-3f(x)+7$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f(x)=e^{-3x}$ **B.** $f(x)=-\dfrac{4}{3}e^{-3x}+\dfrac{7}{3}$ **C.** $f(x)=e^{-3x}+\dfrac{7}{3}$ **D.** $f(x)=-\dfrac{10}{3}e^{-3x}-\dfrac{7}{3}$

3. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de Terminale. Elle s'intéresse à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe : 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ; 20 élèves ont choisi la spécialité SES ; 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol. Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3}\times\binom{11}{2}$ **B.** $\binom{20}{3}+\binom{11}{2}$ **C.** $\binom{20}{3}$ **D.** $20^3\times 11^2$

Soit ε < 0.

Assez rigolé.

Maintenant que tu es détendu, passe à l'exercice suivant, reconcentre-toi, fais honneur à ton maître. Que la rigueur soit avec toi.

EXERCICE 3 [6 points]

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}$.

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$.

3. En déduire que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$ admet pour unique solution : $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Démonter que la suite (u_n) converge vers l.

→

4. On considère le script Python ci-contre.

On rappelle que la commande `abs(x)` renvoie la valeur absolue de `x`.

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.

b. La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
from math import *
def seuil(n) :
      u = 5
      i = 0
      l = (1 + sqrt(5))/2
      while abs(u-l) >= 10**(-n) :
            u = sqrt(u+1)
            i = i+1
      return i
```

EXERCICE 4 [5 points]

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Affirmation 1 : toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

2. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant quinze jours ;
- prix B : il reçoit 1 euro le premier jour, 2 euros le deuxième jour, 4 euros le troisième jour et pendant quinze jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 2 : la valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 3 : il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}.$$

Affirmation 4 : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Affirmation 5 : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

The End