Nom : **Prénom** : **Classe** : T^le^SM

le 09 / 01 / 2025

Note :

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure 10 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 25 min

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-\frac{3}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$.

2. En déduire que : $v_n=\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de *n*.

EXERCICE 2 ≈ 5 min

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

EXERCICE 3 ≈ 40 min

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=10$, avec $f(x)=\frac{1}{2}x^2-9x+\frac{99}{2}$.

1. a) Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire le tableau de signes de *f*.

2. a) Démontrer, par récurrence sur *n*, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $9 \leqslant u_n < 11$.

b) Déterminer les racines réelles du polynôme $f(x)-x$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(u_n-9)(u_n-11)$.

d) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Démontrer que (u_n) converge vers un réel que l'on notera *m* puis, en admettant que $f(m)=m$, en déduire la valeur exacte de *m*.