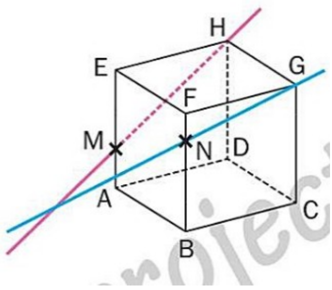
103 ABCDEFGH est un cube. M est un point du segment [EA] et N est un point du segment [FB].

• Les droites (HM) et (GN) sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Justifier.



1er cas : $EM \neq FN$

Montrons alors que « si $EM \neq FN$, alors (HM) et (GN) sont non coplanaires »,
autrement dit (par contraposée) que « si (HM) et (GN) sont coplanaires, alors $EM = FN$ ».

Supposons donc que (HM) et (GN) sont coplanaires.

Alors : $\exists\,(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{HN} = \alpha\,\overrightarrow{HM} + \beta\,\overrightarrow{HG}$.

Alors : $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN} = \alpha\,\overrightarrow{HE} + \alpha\,\overrightarrow{EM} + \beta\,\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ (cube) et d'après la relation de Chasles

$-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FN} = -\alpha\,\overrightarrow{AD} + \alpha\,\overrightarrow{EM} + \beta\,\overrightarrow{AB}$ car HEAD et EFBA sont des carrés

$(1-\vec{\beta})\overrightarrow{AB} + (-1+\vec{\alpha})\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{FN}$

Or, $\alpha\,\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{FN}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{EM}$

et $(1-\vec{\beta})\overrightarrow{AB} + (-1+\vec{\alpha})\overrightarrow{AD}$ est un vecteur dont un représentant est dans (ABC) :

ceci n'est possible que si $\alpha\,\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{FN}$ et $(1-\vec{\beta})\overrightarrow{AB} + (-1+\vec{\alpha})\overrightarrow{AD}$ sont égaux à $\vec{0}$.

De plus, $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace

donc : $1-\beta = 0$, $-1+\alpha = 0$ et $\alpha\,\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{FN} = \vec{0}$

donc : $\beta = 1$, $\alpha = 1$ et $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FN}$

donc : $EM = FN$. QED

2ème cas : $EM = FN$

Alors, puisque (EM) // (FN) : $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FN}$.

Alors : $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EM}$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FN}$ car HEFG est un carré et $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FN}$

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{GN}$ d'après la relation de Chasles

D'où : (HM) // (GN).

Conclusion : si $EM = FN$ alors (HM) // (GN), sinon (HM) et (GN) sont non coplanaires.