LOGIQUE ET RAISONNEMENT

« Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. »
John von Neumann (1903 - 1957)

« Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. »
Isocrate (436 av. J.-C. - 338 av. J.-C.)

« Il n'y a point au monde de lunette ni d'observatoire d'où l'on voit autre chose que des apparences. La science consiste à se faire une idée d'après laquelle on pourra expliquer toutes les apparences. »
Alain (1868 - 1951), *Eléments de philosophie*

En logique classique, l'**implication** A ⇒ B signifie « si A est vraie, alors B est vraie ».
Si je suis à Paris, la capitale française, alors je suis en France. C'est « logique ».

[je suis à Paris, capitale française ⇒ je suis en France]
⇒ [je ne suis pas en France ⇒ je ne suis pas à Paris, capitale française].

Cela semble « logique », n'est-ce pas ?
En logique dite « classique »[1], la **contraposition**[2] est un type de raisonnement consistant à affirmer l'implication non(B) ⇒ non(A) à partir de l'implication A ⇒ B :

[A ⇒ B] ⇒ [non(B) ⇒ non(A)].

L'implication non(B) ⇒ non(A) est appelée **contraposée** de A ⇒ B.

Le **principe du tiers exclu** énonce que seul l'un des deux énoncés suivants est vrai : une proposition est vraie ou fausse ; il n'y a pas de cas intermédiaire entre ces deux énoncés.

En logique classique, on a alors : non(non(A)) est équivalent à A.
On appelle cela l'**élimination des doubles négations**.
Pour s'en convaincre, on peut réaliser une table de vérité :

A	non(A)	non(non(A))
vraie	fausse	vraie
fausse	vraie	fausse

En utilisant cette règle et la contraposition, la réciproque de [A ⇒ B] ⇒ [non(B) ⇒ non(A)] est valide :

[non(B) ⇒ non(A)] ⇒ [non(non(A)) ⇒ non(non(B))]

autrement dit : [non(B) ⇒ non(A)] ⇒ [A ⇒ B].

Finalement, en logique classique : [A ⇒ B] ⇔ [non(B) ⇒ non(A)].

1 La logique classique est la première formalisation du langage et du raisonnement mathématique développée à partir de la fin du XIX[e] siècle en logique mathématique. Ce terme « classique » fait référence à la logique aristotélicienne.

2 Une application de la contraposition est le *modus tollens*, règle d'inférence suivante : [« A ⇒ B » et non(B)] ⇒ non(A).
En latin, *tollens* est la forme présente du participe du verbe *tollo*, qui signifie « lever, soulever, abolir ».

Le **raisonnement par l'absurde** consiste à montrer que si « non(B) est vraie » (c'est-à-dire que B est fausse) mène à une contradiction logique, alors B ne peut pas être fausse et, par le principe du tiers exclu, « B est vraie »[3].
Autrement dit, le raisonnement par l'absurde peut s'écrire : [non(B) ⇒ [A et non(A)]] ⇒ B.

Le **raisonnement par l'absurde** est **équivalent** à la **contraposition**.
Démontrons-le.
Commençons par démontrer la contraposition en raisonnant par l'absurde.
Autrement dit, démontrons : [[non(B) ⇒ [A et non(A)]] ⇒ B] ⇒ [[C ⇒ D] ⇒ [non(D) ⇒ non(C)]].

Supposons C ⇒ D et démontrons que non(D) ⇒ non(C).
On suppose donc non(D) et supposons non(non(C)),
c'est-à-dire, par élimination des doubles négations, C.
Puisque C ⇒ D, alors[4] D.
On a donc non(D) et D, ce qui est une contradiction.
D'après le raisonnement par l'absurde, on conclut que non(C).

Continuons en démontrant le raisonnement par l'absurde par la contraposition.
Autrement dit, démontrons : [[A ⇒ B] ⇒ [non(B) ⇒ non(A)]] ⇒ [[non(C) ⇒ [D et non(D)]] ⇒ C].

Supposons non(C) ⇒ [D et non(D)] et démontrons C.
Par contraposition, non([D et non(D)]) ⇒ non(non(C))
c'est-à-dire[5] [non(D) ou non(non(D))] ⇒ non(non(C))
c'est-à-dire, par élimination des doubles négations, [non(D) ou D] ⇒ C.
Mais, par le principe du tiers exclu, [non(D) ou D] est vraie.
Donc C.

---

3 En réalité, ce raisonnement par l'absurde peut être utilisé dans deux cas :
– montrer que B est vraie en supposant que B est fausse : il s'agit plutôt de la **règle de réfutation**.
– montrer que B est fausse, en supposant que B est vraie : c'est le **raisonnement par l'absurde**.
La logique classique et la **logique intuitionniste** admettent toutes deux la règle de réfutation, mais seule la logique classique admet le raisonnement par l'absurde, qui suppose l'élimination des doubles négations et donc le tiers exclu.
La logique intuitionniste est une logique qui diffère de la logique classique par le fait que la notion de *vérité* est remplacée par la notion de *preuve constructive* : quand un mathématicien affirme « il existe x tel que P(x) », il doit donner un moyen de construire x qui satisfait P(x). De plus, le tiers exclu n'est pas valide dans cette logique.
Alors « A est vraie » devient « A est prouvable », et « A est fausse » ou « non(A) est vraie » devient « A est contradictoire ». Par conséquent, une proposition A peut être ni prouvable ni contradictoire ! Et cela apporte une nuance souvent rencontrée dans certains domaines comme l'informatique théorique (où cette logique intuitionniste a des applications) ou la preuve mathématique assistée par ordinateur (logiciel Coq).
Qu'en est-il de l'élimination des doubles négations dans cette logique intuitionniste ? L'implication « A ⇒ non(non(A)) » reste valide, puisque « non(non(A)) » signifie « A n'est pas contradictoire » et que si A est prouvable alors A n'est pas contradictoire. Mais « non(non(A)) ⇒ A » n'est plus valide… En effet, « A n'est pas contradictoire » n'implique pas nécessairement que « A est prouvable ».
Je vous invite à consulter certains articles Wikipédia sur ces sujets, dont voici un extrait : « Pour un intuitionniste, l'affirmation selon laquelle un objet possédant certaines propriétés existe est une affirmation qu'un objet possédant ces propriétés peut être construit. Tout objet mathématique est considéré comme le produit d'une construction d'un esprit, et donc l'existence d'un objet équivaut à la possibilité de sa construction. Cela contraste avec l'approche classique pour laquelle l'existence d'une entité peut être prouvée en réfutant sa non-existence. Pour l'intuitionniste, ce n'est pas valable ; la réfutation de l'inexistence ne signifie pas qu'il soit possible de trouver une construction pour l'objet putatif, comme cela est nécessaire pour affirmer son existence. »

4 Ce raisonnement logique qui consiste à affirmer une implication (« C ⇒ D ») et à poser ensuite l'*antécédent* (« C ») pour en déduire le *conséquent* (« D ») est appelé *modus ponens*.
En latin, *ponens* est la forme présente du participe du verbe *pono*, qui signifie « déposer, placer, établir ».

5 En utilisant les lois de De Morgan qui sont des lois de la logique « classique ». Celles-ci précisent que :
[non(A et B)] ⇔ [non(A) ou non(B)]   [non(A ou B)] ⇔ [non(A) et non(B)].
On peut se convaincre de ces lois en utilisant des tables de vérité (voir par exemple l'article Wikipédia sur le sujet).
Remarque : en logique intuitionniste, l'implication [non(A et B)] ⇒ [non(A) ou non(B)] n'est pas valide. Par exemple, « être grand et petit » est contradictoire, mais « être grand » n'est pas contradictoire et « être petit » n'est pas contradictoire.

Et si A est fausse dans « A ⇒ B » ?

Considérons deux propositions A et B.
En logique classique, il convient de distinguer quatre cas répartis ainsi :

	« B vraie »	« B fausse »
« A vraie »	« A vraie et B vraie »	« A vraie et B fausse »
« A fausse »	« A fausse et B vraie »	« A fausse et B fausse »

A vraie et B vraie

Si l'on suppose vraie une proposition A qui est vraie, et qu'en raisonnant « logiquement », on démontre qu'une autre proposition B est vraie, l'implication « A ⇒ B » est vraie.

Exemple :

A : « 1+1 = 2 »   B : « 0 = 0 »
L'implication « A ⇒ B » est vraie.
Démonstration : si 1+1 = 2 alors $0\times(1+1)=0\times2$ *ie* 0 = 0.

Mais en réalité, peu importe que nous utilisions A dans notre raisonnement.
Par exemple, « 1+1 = 2 ⇒ 0 = 0 » peut être démontré ainsi :
on suppose que 1+1 = 2. Or, on sait que 1 = 1. Par conséquent, $0\times1=0\times1$ *ie* 0 = 0.
L'implication « 1+1 = 2 ⇒ 0 = 0 » reste vraie, que j'utilise « 1+1 = 2 » ou pas.

A vraie et B fausse

Intuitivement, cette implication « A ⇒ B » est fausse. Car comment imaginer, à partir d'une hypothèse vraie, aboutir à une conclusion fausse en raisonnant « logiquement » ? Cela signifierait qu'on pourrait démontrer « logiquement » des propositions fausses.

A fausse

En faisant l'hypothèse d'une proposition fausse, il est possible de démontrer une proposition fausse mais également une proposition vraie !

Exemple 1 :
A : « 1+1 = 3 »   B : « 0 = 0 »
Si 1+1 = 3 alors $0\times(1+1)=0\times3$ *ie* 0 = 0.

Exemple 2 :
A : « 1+1 = 3 »   B : « 1 = 2 »
Si 1+1 = 3 alors $1+1-1=3-1$ *ie* 1 = 2.

Comme mentionné plus haut, nous pouvons reprendre l'exemple 1 sans utiliser, dans notre raisonnement, l'hypothèse que A est fausse. En effet, supposons que « 1+1 = 3 ». Je décide alors de ne pas me servir de cette hypothèse et je préfère constater que 1 = 1. Par conséquent, $0\times1=0\times1$ *ie* 0 = 0.
L'implication « 1+1 = 3 ⇒ 0 = 0 » reste vraie si je n'utilise pas mon hypothèse (fausse) « 1+1 = 3 ».

De manière générale, prenons le cas d'une proposition A fausse et d'une proposition B dont on ignore la véracité.
Supposons que A est vraie. La phrase « A est fausse ou B est vraie » est vraie, puisque A est fausse.
Mais nous avons supposé que A est vraie, on n'est donc pas dans le cas « A est fausse »…
Par conséquent, B est vraie.

Cela démontre donc qu'**à partir d'une contradiction** (« A est vraie et A est fausse »), **on peut déduire ce qu'on veut**.

De plus, le cas « A $\Rightarrow$ B » où A est fausse et B est fausse est équivalent, d'après la contraposition, à « non(B) $\Rightarrow$ non(A) », ce qui revient à écrire « C $\Rightarrow$ D » avec C vraie et D vraie… Par conséquent, si l'on accepte la contraposition, il est cohérent de dire que « A $\Rightarrow$ B » est vraie.
En supposant vraie une proposition fausse, il est donc possible de démontrer qu'une autre proposition est vraie alors qu'elle est fausse.
Par exemple : A : « j'habite sur Mars » B : « je suis mort ».
Dire que « j'habite sur Mars $\Rightarrow$ je suis mort » est équivalent à « je ne suis pas mort $\Rightarrow$ je n'habite pas sur Mars ». Or, « je ne suis pas mort » et « je n'habite pas sur Mars » sont deux propositions vraies : « A $\Rightarrow$ B » est donc vraie.
Autre exemple : « $2 \leq 0 \Rightarrow 1+1 \neq 2$ » est équivalent, par contraposition, à « $1+1 = 2 \Rightarrow 2 > 0$ ». Cette implication étant vraie, on a également « $2 \leq 0 \Rightarrow 1+1 \neq 2$ » vraie.

Et le cas « A $\Rightarrow$ B » où A est fausse et B est vraie ?
Peut-on, en pensant vraie une proposition fausse, démontrer que B est vraie avec B vraie ?
Oui, nous l'avons vu dans l'exemple 1. De plus, B est vraie : peu importe ce que l'on suppose : B est vraie et le restera.

Nous avons donc la table de vérité suivante :

A	B	A $\Rightarrow$ B
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	vraie

De plus, la table de vérité de « non(A) ou B » est :

A	B	non(A) ou B
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	vraie

Ces deux tables de vérité étant identiques, on a :

« A $\Rightarrow$ B » $\Leftrightarrow$ [non(A) ou B].

Une question pas si évidente

« Une suite bornée[6] qui n'est pas minorée est nécessairement majorée » : vrai ou faux ?

Cela revient à savoir si la proposition suivante est vraie :

Soit (u_n) une suite bornée telle que (u_n) n'est pas minorée.
Alors elle est majorée.

Or, à partir de la contradiction de la première ligne, on peut démontrer ce que l'on veut. C'est donc vrai !
Par conséquent : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement majorée.

On pourrait aussi écrire : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement non majorée.

On pourrait même écrire : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement non bornée…
D'ailleurs, d'après le principe de non-contradiction[7], une telle suite n'existe même pas !

6 Bornée : minorée et majorée.

7 Ce principe stipule qu'une proposition et sa négation ne peuvent pas être toutes les deux vraies.
Ce principe reste valide en logique intuitionniste : une proposition A ne peut pas être prouvable et réfutable, c'est-à-dire qu'on ne peut pas fournir une preuve constructive de A et fournir une preuve constructive de « A est contradictoire ».