

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

« Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. »

John von Neumann (1903 - 1957)

« Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. »

Isocrate (436 av. J.-C. - 338 av. J.-C.)

« Il n'y a point au monde de lunette ni d'observatoire d'où l'on voit autre chose que des apparences. La science consiste à se faire une idée d'après laquelle on pourra expliquer toutes les apparences. »

Alain (1868 - 1951), *Eléments de philosophie*

En logique classique, l'**implication** $A \Rightarrow B$ signifie « si A est vraie, alors B est vraie ».

Si je suis à Paris, la capitale française, alors je suis en France. C'est « logique ».

[je suis à Paris, capitale française $\Rightarrow$ je suis en France]

$\Rightarrow$ [je ne suis pas en France $\Rightarrow$ je ne suis pas à Paris, capitale française].

Cela semble « logique », n'est-ce pas ?

En logique dite « classique »¹, la **contraposition**² est un type de raisonnement consistant à affirmer l'implication $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ à partir de l'implication $A \Rightarrow B$:

[$A \Rightarrow B$] $\Rightarrow$ [$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$].

L'implication $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ est appelée **contraposée** de $A \Rightarrow B$.

Le **principe du tiers exclu** énonce qu'au moins³ l'un des deux énoncés suivants est vrai : « A est vraie » ou « A est fausse » ; il n'y a pas de cas intermédiaire entre ces deux énoncés, et « A ou $\text{non}(A)$ » est vraie.

En logique classique, on a alors : $\text{non}(\text{non}(A))$ est équivalent à A.

On appelle cela l'**élimination des doubles négations**.

Pour s'en convaincre, on peut réaliser une table de vérité :

A	$\text{non}(A)$	$\text{non}(\text{non}(A))$
vraie	fausse	vraie
fausse	vraie	fausse

En utilisant cette règle et la contraposition, la réciproque de [$A \Rightarrow B$] $\Rightarrow$ [$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$] est valide :

[$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$] $\Rightarrow$ [$\text{non}(\text{non}(A)) \Rightarrow \text{non}(\text{non}(B))$]

autrement dit : [$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$] $\Rightarrow$ [$A \Rightarrow B$].

Finalement, en logique classique : [$A \Rightarrow B$] $\Leftrightarrow$ [$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$].

1 La logique classique est la première formalisation du langage et du raisonnement mathématique développée à partir de la fin du XIX^e siècle en logique mathématique. Ce terme "classique" fait référence à la logique aristotélicienne.

2 Une application de la contraposition est le *modus tollens*, règle d'inférence suivante : [« $A \Rightarrow B$ » et $\text{non}(B)$] $\Rightarrow$ $\text{non}(A)$. En latin, *tollens* est le participe présent du verbe *tollo*, qui signifie "lever, soulever, abolir".

3 Le principe de non-contradiction, vu un peu plus loin, précise qu'au plus l'un des deux est vrai. Le tiers exclu et la non-contradiction forment ce qu'on appelle la bivalence.

Le **raisonnement par l'absurde** consiste à montrer que si « non(B) est vraie » (c'est-à-dire que B est fausse) mène à une contradiction logique, alors B ne peut pas être fausse et, par le principe du tiers exclu, « B est vraie »⁴.

Autrement dit, le raisonnement par l'absurde peut s'écrire : $[\text{non}(B) \Rightarrow [A \text{ et } \text{non}(A)]] \Rightarrow B$.

Exemple 1 : par l'absurde, supposons que 0 a un inverse, que l'on note a .

Alors : $0 \times a = 1$. Or⁵ : $0 \times a = 0$. D'où : $0 = 1$. Ceci est une contradiction logique, donc 0 n'a pas d'inverse.

Exemple 2⁶ : démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Le **raisonnement par l'absurde** est **équivalent** à la **contraposition**.

Démontrons-le.

Commençons par démontrer la contraposition en raisonnant par l'absurde.

Autrement dit, démontrons : $[[\text{non}(B) \Rightarrow [A \text{ et } \text{non}(A)]] \Rightarrow B] \Rightarrow [[C \Rightarrow D] \Rightarrow [\text{non}(D) \Rightarrow \text{non}(C)]]$.

Supposons $C \Rightarrow D$ et démontrons que $\text{non}(D) \Rightarrow \text{non}(C)$.

On suppose donc $\text{non}(D)$ et supposons $\text{non}(\text{non}(C))$,

c'est-à-dire, par élimination des doubles négations, C.

Puisque $C \Rightarrow D$, alors⁷ D.

On a donc $\text{non}(D)$ et D, ce qui est une contradiction.

D'après le raisonnement par l'absurde, on conclut que $\text{non}(C)$.

Continuons en démontrant le raisonnement par l'absurde par la contraposition.

Autrement dit, démontrons : $[[A \Rightarrow B] \Rightarrow [\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)]] \Rightarrow [[\text{non}(C) \Rightarrow [D \text{ et } \text{non}(D)]] \Rightarrow C]$.

Supposons $\text{non}(C) \Rightarrow [D \text{ et } \text{non}(D)]$ et démontrons C.

Par contraposition, $\text{non}([D \text{ et } \text{non}(D)]) \Rightarrow \text{non}(\text{non}(C))$

c'est-à-dire⁸ $[\text{non}(D) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(D))] \Rightarrow \text{non}(\text{non}(C))$

c'est-à-dire, par élimination des doubles négations, $[\text{non}(D) \text{ ou } D] \Rightarrow C$.

Mais, par le principe du tiers exclu, $[\text{non}(D) \text{ ou } D]$ est vraie.

Donc C.

4 Voir les compléments (page 5) pour quelques nuances.

5 En effet : $0 \times a = (0+0) \times a = 0 \times a + 0 \times a$. En retranchant $0 \times a$ à chaque membre : $0 = 0 \times a$.

6 Réponse en vidéo : <https://youtu.be/ixh9UtRjHho>

7 Ce raisonnement logique qui consiste à affirmer une implication (« $C \Rightarrow D$ ») et à poser ensuite l'*antécédent* (« C ») pour en déduire le *conséquent* (« D ») est appelé *modus ponens*.

En latin, *ponens* est le participe présent du verbe *pono*, qui signifie "déposer, placer, établir".

8 En utilisant les lois de De Morgan qui sont des lois de la logique classique. Celles-ci précisent que :

$[\text{non}(A \text{ et } B)] \Leftrightarrow [\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)]$ $[\text{non}(A \text{ ou } B)] \Leftrightarrow [\text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B)]$.

On peut se convaincre de ces lois en utilisant des tables de vérité (voir par exemple l'article Wikipédia sur le sujet).

Remarque : en logique intuitionniste, l'implication $[\text{non}(A \text{ et } B)] \Rightarrow [\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)]$ n'est pas valide. Par exemple, « être grand et petit » est contradictoire, mais « être grand » n'est pas contradictoire et « être petit » n'est pas contradictoire.

Considérons deux propositions A et B.

En logique classique, il convient de distinguer quatre cas répartis ainsi (en utilisant le tiers exclu) :

	« B vraie »	« B fausse »
« A vraie »	« A vraie et B vraie »	« A vraie et B fausse »
« A fausse »	« A fausse et B vraie »	« A fausse et B fausse »

A vraie et B vraie

Si l'on suppose vraie une proposition A qui est vraie, et qu'en raisonnant « logiquement », on démontre qu'une autre proposition B est vraie, l'implication « $A \Rightarrow B$ » est vraie.

Exemple :

A : « $1+1 = 2$ » B : « $0 = 0$ »

L'implication « $A \Rightarrow B$ » est vraie.

Démonstration : si $1+1 = 2$ alors $0 \times (1+1) = 0 \times 2$ ie $0 = 0$.

Mais en réalité, peu importe que nous utilisions A dans notre raisonnement.

Par exemple, « $1+1 = 2 \Rightarrow 0 = 0$ » peut être démontré ainsi :

on suppose que $1+1 = 2$. Or, on sait que $1 = 1$. Par conséquent, $0 \times 1 = 0 \times 1$ ie $0 = 0$.

L'implication « $1+1 = 2 \Rightarrow 0 = 0$ » reste vraie, que j'utilise « $1+1 = 2$ » ou pas.

A vraie et B fausse

Intuitivement, cette implication « $A \Rightarrow B$ » est fausse. Car comment imaginer, à partir d'une hypothèse vraie, aboutir à une conclusion fausse en raisonnant « logiquement » ? Cela signifierait qu'on pourrait démontrer « logiquement » des propositions fausses.

A fausse

En faisant l'hypothèse d'une proposition fausse, il est possible de démontrer une proposition fausse mais également une proposition vraie !

Exemple 1 :

A : « $1+1 = 3$ » B : « $0 = 0$ »
Si $1+1 = 3$ alors $0 \times (1+1) = 0 \times 3$ ie $0 = 0$.

Exemple 2 :

A : « $1+1 = 3$ » B : « $1 = 2$ »
Si $1+1 = 3$ alors $1+1-1 = 3-1$ ie $1 = 2$.

Comme mentionné plus haut, nous pouvons reprendre l'exemple 1 sans utiliser, dans notre raisonnement, l'hypothèse que A est fausse. En effet, supposons que « $1+1 = 3$ ». Je décide alors de ne pas me servir de cette hypothèse et je préfère constater que $1 = 1$. Par conséquent, $0 \times 1 = 0 \times 1$ ie $0 = 0$.

L'implication « $1+1 = 3 \Rightarrow 0 = 0$ » reste vraie si je n'utilise pas mon hypothèse (fausse) « $1+1 = 3$ ».

De manière générale, prenons le cas d'une proposition A fausse et d'une proposition B dont on ignore la véracité.

On sait que A est fausse. Donc la phrase « A est fausse ou B est vraie » est vraie.

Supposons maintenant que A est vraie. On n'est donc⁹ pas dans le cas « A est fausse »...

Par conséquent, B est vraie.

⁹ C'est le principe de non-contradiction : A et non(A) ne peuvent être vraies ensemble.

Cela démontre donc qu'à **partir d'une contradiction** (« A est vraie et A est fausse »), **on peut déduire ce qu'on veut**. C'est ce qu'on appelle *ex falso quodlibet* (ou principe d'explosion).

De plus, le cas « **A** $\Rightarrow$ **B** » où A est fausse et B est fausse est équivalent, d'après la contraposition, à « **non(B)** $\Rightarrow$ **non(A)** », ce qui revient à écrire « **C** $\Rightarrow$ **D** » avec C vraie et D vraie... Par conséquent, si l'on accepte la contraposition, il est cohérent de dire que « A $\Rightarrow$ B » est vraie.

En supposant vraie une proposition fausse, il est donc possible de démontrer qu'une autre proposition est vraie alors qu'elle est fausse.

Par exemple : A : « j'habite sur Mars » B : « je suis mort ».

Dire que « j'habite sur Mars $\Rightarrow$ je suis mort » est équivalent à « je ne suis pas mort $\Rightarrow$ je n'habite pas sur Mars ». Or, « je ne suis pas mort » et « je n'habite pas sur Mars » sont deux propositions vraies : « A $\Rightarrow$ B » est donc vraie.

Autre exemple : « $2 \leq 0 \Rightarrow 1+1 \neq 2$ » est équivalent, par contraposition, à « $1+1 = 2 \Rightarrow 2 > 0$ ». Cette implication étant vraie, on a également « $2 \leq 0 \Rightarrow 1+1 \neq 2$ » vraie.

Et le cas « **A** $\Rightarrow$ **B** » où A est fausse et B est vraie ?

Peut-on, en pensant vraie une proposition fausse, démontrer que B est vraie avec B vraie ?

Oui, nous l'avons vu dans l'exemple 1. De plus, B est vraie : peu importe ce que l'on suppose : B est vraie et le restera.

Nous avons donc la table de vérité suivante :

A	B	A $\Rightarrow$ B
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	vraie

De plus, la table de vérité de « non(A) ou B » est :

A	B	non(A) ou B
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	vraie

Ces deux tables de vérité étant identiques, on a :

$$\ll A \Rightarrow B \gg \Leftrightarrow [\text{non}(A) \text{ ou } B].$$



« Une suite bornée¹⁰ qui n'est pas minorée est nécessairement majorée » : vrai ou faux ?

Cela revient à savoir si la proposition suivante est vraie :

« Soit (u_n) une suite bornée telle que (u_n) n'est pas minorée.
Alors elle est majorée. »

Or, à partir de la contradiction de la première ligne, on peut démontrer ce que l'on veut. La proposition est donc vraie !

Par conséquent : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement majorée.

Mais on pourrait aussi écrire : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement non majorée.

On pourrait même écrire : une suite bornée qui n'est pas minorée est nécessairement non bornée...

D'ailleurs, d'après le principe de non-contradiction, une telle suite n'existe même pas !

COMPLÉMENTS

Dans ce paragraphe, nous noterons¹¹ $\neg A$ au lieu de $\text{non}(A)$.

En logique classique, ce qu'on appelle *raisonnement par l'absurde* peut être utilisé dans deux cas :

- | | |
|---|---|
| ▪ montrer que A est fausse, en supposant que A est vraie et en aboutissant à une contradiction : c'est plutôt la règle de l'introduction de la négation ou preuve par négation, ou encore règle de réfutation. | ▪ montrer que A est vraie, en supposant que A est fausse et en aboutissant à une contradiction : c'est le (vrai) raisonnement par l'absurde , ou preuve par contradiction. |
|---|---|

Dans l'exemple 1 de la page 2, on a démontré que « 0 n'a pas d'inverse » en supposant que « 0 a un inverse ». Autrement dit, on a démontré que « 0 a un inverse » est faux en supposant que « 0 a un inverse » est vrai. On a donc utilisé la règle de l'introduction de la négation.

De même, démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, autrement dit que « $\sqrt{2}$ est rationnel » est faux, en supposant que ce nombre est rationnel (et en aboutissant à une contradiction logique), c'est utiliser la règle de l'introduction de la négation.

¹⁰ Bornée : minorée et majorée.

¹¹ Ce symbole de la négation a été utilisé pour la première fois par Arend Heyting en 1930, dans *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*.

Un exemple célèbre de cette règle de l'introduction de la négation est l'intervention de Robert Badinter à l'Assemblée nationale, le 17 septembre 1981. Il est alors ministre de la Justice et présente le projet de loi abolissant la peine de mort, un des engagements présidentiels de François Mitterrand :

« En 1908, Briand, à son tour, entreprit de demander à la Chambre l'abolition. Curieusement, il ne le fit pas en usant de son éloquence. Il s'efforça de convaincre en représentant à la Chambre une donnée très simple, que l'expérience récente – de l'école positiviste – venait de mettre en lumière.

Il fit observer en effet que, par suite du tempérament divers des Présidents de la République qui se sont succédés, à cette époque de grande stabilité sociale et économique, la pratique de la peine de mort avait singulièrement évolué pendant deux fois dix ans : 1888-1897, les Présidents faisaient exécuter ; 1898-1907, les Présidents – Loubet, Fallières – abhorraient la peine de mort et, par conséquent, accordaient systématiquement la grâce. Les données étaient claires : dans la première période où l'on pratique l'exécution : 3 066 homicides ; dans la seconde période, où la douceur des hommes fait qu'ils y répugnent et que la peine de mort disparaît de la pratique répressive : 1 068 homicides, près de la moitié.

Telle est la raison pour laquelle Briand, au-delà même des principes, vint demander à la Chambre d'abolir la peine de mort qui, la France venait ainsi de le mesurer, n'était pas dissuasive. »

La logique classique et la logique intuitionniste admettent toutes deux cette règle, mais seule la logique classique admet le raisonnement par l'absurde. Voyons pourquoi.

La **logique intuitionniste** diffère de la logique classique par le fait que la notion de *vérité* est remplacée par la notion de *preuve constructive* : quand un mathématicien affirme « il existe x tel que $P(x)$ », il doit donner un moyen de construire x qui satisfait $P(x)$. Cela contraste avec l'approche classique pour laquelle l'existence d'une entité peut être prouvée en réfutant sa non-existence. Pour l'intuitionniste, ce n'est pas valable : la réfutation de l'inexistence ne signifie pas qu'il soit possible de trouver une construction pour l'objet putatif, comme cela est nécessaire pour affirmer son existence.

En logique classique, on remarque dans les tables de vérité que :

$(\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp))$ où $\perp$ dénote une proposition qui est toujours fausse.

Cette équivalence sert de définition en logique intuitionniste : affirmer $\neg A$ revient à disposer d'une réfutation de A , c'est-à-dire d'une preuve que toute preuve de A conduirait à $\perp$.

A	$\neg A$	$\perp$	$A \Rightarrow \perp$
V	F	F	F
F	V	F	V

En logique intuitionniste, **le principe du tiers exclu n'est pas valide**.

En effet, « A est vraie » devient « A est prouvable », et « A est fausse » ou « $\neg(A)$ est vraie » deviennent « A est réfutée » ($A \Rightarrow \perp$). Cela apporte donc une nuance essentielle :

- en logique classique : toute proposition a une valeur de vérité déterminée (vrai ou faux), même si on ne la connaît pas encore. La vérité est une propriété ontologique, indépendante de notre capacité à la démontrer ;

- en logique intuitionniste : « vrai » et « faux » sont attribués *a posteriori*, quand on dispose effectivement d'une preuve ou d'une réfutation. Tant qu'on n'a ni l'une ni l'autre, la proposition reste dans un troisième état, ouvert. Chez les intuitionnistes, la vérité est la preuve, elle ne préexiste pas à elle.

On pourrait penser que ne pas accepter le tiers exclu comme une évidence, c'est être fou... Pourtant, en utilisant le tiers exclu, on peut par exemple définir la fonction qui, à un code source de programme, associe 1 s'il termine ou 0 s'il ne termine pas. Mais en pratique, il n'est pas toujours possible de déterminer si un programme s'est terminé ! La logique intuitionniste correspond assez naturellement à ce qui est "calculable".

De même, en utilisant le tiers exclu, on peut aussi démontrer que « dans tout bar non vide, il existe

quelqu'un tel que, si cette personne boit, alors tout le monde dans le bar boit » : c'est le fameux paradoxe du buveur¹². La logique intuitionniste, en refusant de telles "absurdités", n'est finalement pas si absurde...

Le tiers exclu n'étant pas valide en logique intuitionniste, la table de vérité de la page 4 perd son statut de définition : rien ne garantit plus qu'une proposition A soit prouvable ou réfutée, donc rien ne garantit qu'on se trouve dans l'un des quatre cas. On ne lit plus l'implication dans une table, on la démontre.

Le résultat de la page 3, lui, subsiste : si A est réfutée, alors « $A \Rightarrow B$ » est prouvable, quelle que soit B. En effet, une preuve de A jointe à une réfutation de A fournit une preuve de $\perp$, et de $\perp$ on déduit ce que l'on veut. Ce principe (*ex falso quodlibet*) reste valide en logique intuitionniste¹³ : il n'affirme pas qu'on obtiendra effectivement une preuve de B, mais que la situation où il faudrait en fournir une ne se présente jamais, puisque $\perp$ n'a aucune preuve.

Ce qui change, c'est la façon d'affirmer « $A \Rightarrow B$ » : chez l'intuitionniste, il faut disposer d'une démonstration qui, à partir d'une preuve de A, permet de construire une preuve de B.

En logique intuitionniste, **l'élimination des doubles négations n'est pas valide**.

Plus précisément, l'implication « $A \Rightarrow \neg\neg A$ » reste valide, puisque « $\neg\neg A$ » signifie « "A est réfutée" est réfutée », ou encore « $(A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$ ». Et on a bien : « $A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$ ».

Mais l'implication « $\neg\neg A \Rightarrow A$ » **n'est plus valide** ! En effet, dire que « "A est réfutée" est réfutée » ne signifie pas que A est prouvable. Dit autrement, « $((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ » n'est pas valide.

Et c'est pourquoi **le raisonnement par l'absurde n'est pas valide** dans la logique intuitionniste !

Utiliser un tel raisonnement dans cette logique, ce serait montrer que A est prouvable en supposant que A est réfutée et en aboutissant à une réfutation de cette hypothèse, dit autrement : « $((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$ ». Ce qui reviendrait à écrire, comme nous l'avons vu juste au-dessus : « $\neg\neg A \Rightarrow A$ ».

Enfin, soyons précis concernant la **contraposition**¹⁴ : « $[A \Rightarrow B] \Rightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$ » est valide en logique intuitionniste, mais « $[\neg B \Rightarrow \neg A] \Rightarrow [A \Rightarrow B]$ » ne l'est pas.

Le principe de non-contradiction reste valide : une proposition A ne peut pas être prouvable et réfutable.

CINQ ÉNONCÉS VALIDES EN LOGIQUE CLASSIQUE UNIQUEMENT¹⁵

Tiers exclu :	$A \text{ ou } \neg A$
Élimination des doubles négations :	$\neg\neg A \Rightarrow A$
Raisonnement par l'absurde :	$[\neg A \Rightarrow \perp] \Rightarrow A$
Contraposition (réciproque) :	$[\neg B \Rightarrow \neg A] \Rightarrow [A \Rightarrow B]$
Implication vers disjonction :	$[A \Rightarrow B] \Rightarrow [\neg A \text{ ou } B]$

¹² Voir <https://youtube.com/shorts/I7w0UIN8Wzc> (2 min)

¹³ Une logique qui refuse ce principe existe : la logique minimale (Johansson, 1937), qui est la logique intuitionniste privée de l'élimination de $\perp$. Elle n'admet donc ni le tiers exclu, ni « d'une contradiction on déduit tout ».

¹⁴ La démonstration de la page 2 mérite alors une nuance : ce n'est pas la contraposition qui est équivalente au raisonnement par l'absurde, mais sa réciproque. Le sens direct, lui, ne demande pas l'absurde, et la démonstration de la page 2 utilise en réalité, en plus de la contraposition, l'élimination des doubles négations et le tiers exclu.

¹⁵ Ces cinq énoncés sont équivalents entre eux : admettre l'un, c'est admettre les quatre autres. Plus précisément, ils sont équivalents en tant que *schémas*, c'est-à-dire lorsqu'on les admet pour toutes les propositions à la fois. Pour une proposition A fixée, « $\neg\neg A \Rightarrow A$ » et « $A \text{ ou } \neg A$ » ne sont pas équivalents.