Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
« BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points]

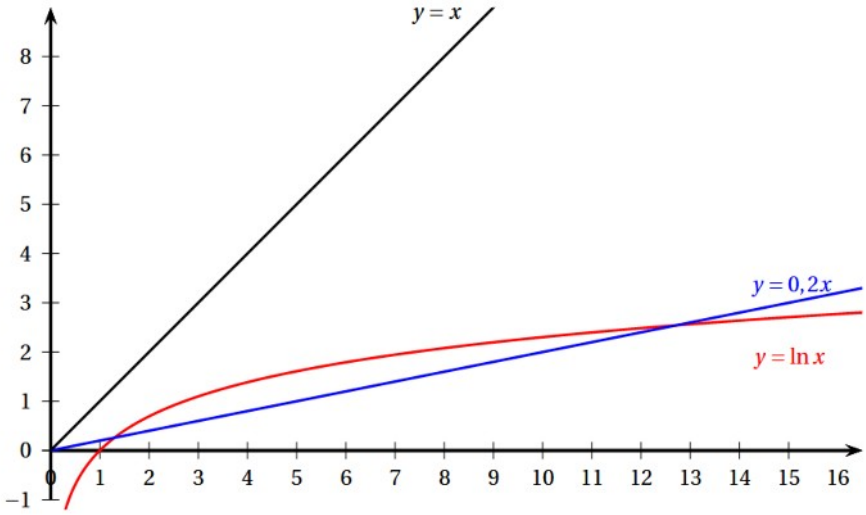
Soit k un réel strictement positif.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=k\,x$, de paramètre k.

1. Conjectures graphiques :

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y=\ln(x)$, la droite d'équation $y=x$ ainsi que la droite d'équation $y=0{,}2x$.

À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=k\,x$ pour $k=1$ puis pour $k=0{,}2$.



2. Étude du cas $k = 1$:

On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-x$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a. Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=x$.

3. Étude du cas général : k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x)-k\,x$. On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant.

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

a. Déterminer, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$.

b. Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

c. Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right)>0$ équivaut à $\ln(k)<-1$.

d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x)=k\,x$ possède exactement deux solutions.

e. Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=k\,x$.

EXERCICE 2 [5 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandée.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question, la lettre de la réponse choisie et la réponse choisie.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. La bille numérotée 1 est rouge. Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues. Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne. On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

1. Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

A. $\frac{7}{15}$ **B.** $\frac{9}{15}$ **C.** $\frac{11}{10}$ **D.** Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

2. Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{7}{15}$ **C.** $\frac{1}{10}$ **D.** Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.

Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne :

- si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille ;
- si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille ;
- si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ. Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

3. Que vaut $P(G=5)$?

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{2}{15}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

4. Quelle est la valeur de $P_R(G=0)$?

A. 0 **B.** $\frac{1}{15}$ **C.** 1 **D.** Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

5. Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{4}{15}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

EXERCICE 3 [6 points]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=\frac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1. Calculer u_1.

2. Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{6x+2}{x+5}$.

a. Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

En déduire que pour tout réel $x>2$, on a $f(x)>2$.

b. Démonter par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n>2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+1}$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

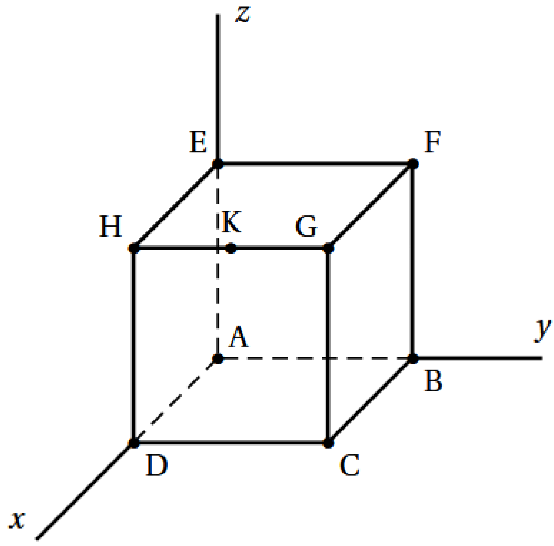
```
def seuil(A) :
     n = 0
     u = 8
     while u > A :
           u = (6*u+2)/(u+5)
           n = n+1
     return n
```

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 [4 points]

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre. On note K le milieu du segment [HG].

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

2. a. Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.

b. Calculer l'aire du triangle FGC.

c. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par le tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur correspondante. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

3. a. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\,;2\,;1)$. Démontrer que $\vec{n}$ est normal au plan (CFK).

b. Soit M un point de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ qui appartient au plan (CFK).

En déduire que : $x+2y+z-3=0$.

4. a. On note Δ la droite passant par G et orthogonale au plan (CFK). On admet que pour tout point M de cette droite, il existe un réel t tel que les coordonnées de M sont : $(1+t\,;1+2t\,;1+t)$.

Déterminer les coordonnées du point L, point d'intersection de Δ et du plan (CFK).

b. En déduire que : $LG=\frac{\sqrt{6}}{6}$.