Nom : .... **Prénom** : ....

→ RENDRE TOUT LE SUJET ←
→ AVEC VOTRE COPIE ←

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{11}{u_n}\right)$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A – Étude de la suite

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11};+\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note *a* cette limite.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont *a* est solution, préciser la valeur exacte de *a*.

Partie B – Application géométrique

Pour tout entier naturel *n*, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur et la longueur sont respectivement notées l_n et L_n. La suite (L_n) est définie par $\mathrm{L}_0=5$ et pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{L}_{n+1}=\frac{\mathrm{L}_n+l_n}{2}$.

1. a. Expliquer pourquoi $l_0=2{,}2$.

b. Établir que pour tout entier naturel *n*, $l_n=\frac{11}{\mathrm{L}_n}$.

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.

3. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $l_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant \mathrm{L}_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (l_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la partie B.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie.

On rappelle que la fonction Python `round(x, k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

```
def heron(n) :
      L=5
      l=2.2
      for i in range(n) :
            L=(L+l)/2
            l=11/L
      return round(l,6), round(L,6)
```

a. Si l'utilisateur tape heron(3) dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour *l* et *L* ?

b. Donner une interprétation de ces valeurs.

EXERCICE 2 [5 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question, la lettre de la réponse choisie et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$.

Parmi les quatre fonctions F ci-dessous, laquelle vérifie $\mathrm{F}'=f$?

A. $\mathrm{F}(x)=2x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$ **B.** $\mathrm{F}(x)=(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2-3}$

C. $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$ **D.** $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\mathrm{e}^{2n+1}$.

La suite (u_n) est :

A. arithmétique de raison 2 **B.** géométrique de raison e

C. géométrique de raison e^2 **D.** convergente vers e

Pour les questions 3. et 4., on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0=15 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=1{,}2u_n+12.$$

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n>10\,000$.

À la ligne 4, on complète par :

A. `u<=10000` **B.** `u=10000`

C. `u>10000` **D.** `n<=10000`

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while …… :
        n=n+1
        u=1,2*u+12
    return n
```

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n+60$. Cette suite est :

A. une suite décroissante **B.** une suite géométrique de raison 1,2

C. une suite arithmétique de raison 60 **D.** une suite ni géométrique ni arithmétique

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x\,\mathrm{e}^x$.

Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\frac{73}{100}$ est égal à :

A. 0 **B.** 1

C. 2 **D.** une infinité

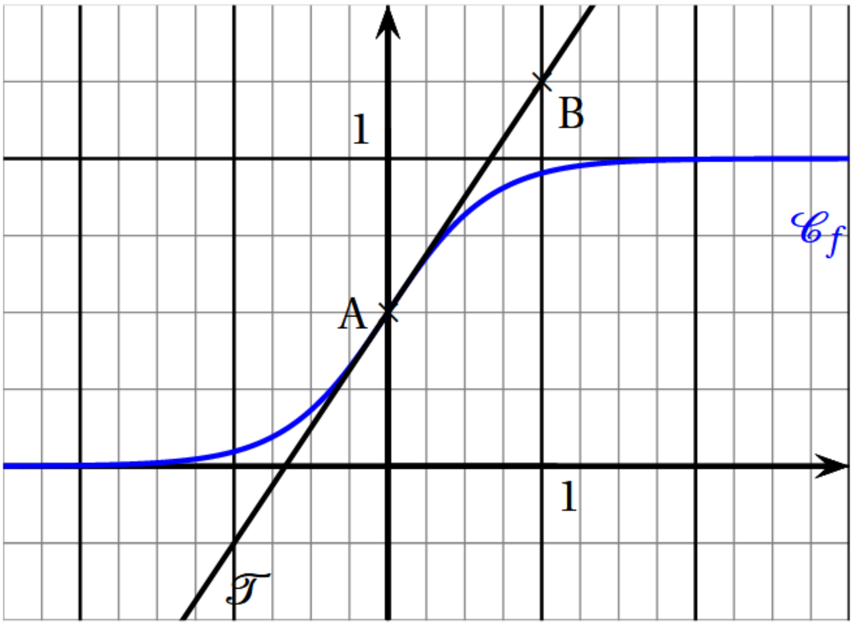
EXERCICE 3 [5 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A – Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B – Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f\,'$.

2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.

4. Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}99$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, et donner une valeur approchée au millième de cette solution.

Partie C – Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x)=\dfrac{9\,\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$.

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

c. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

EXERCICE 4 [5 points]

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches : elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.

On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.

Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.

Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».

On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0, 992 ;
- si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

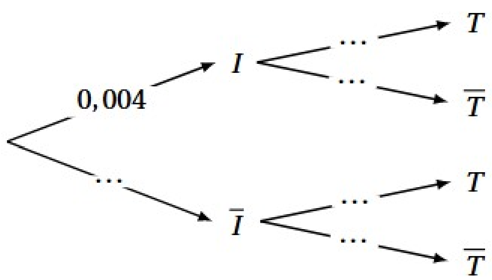
On désigne par :
- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{\text{I}}$ l'évènement contraire de I et $\overline{\text{T}}$ l'évènement contraire de T.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. a. Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.
Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache.
On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

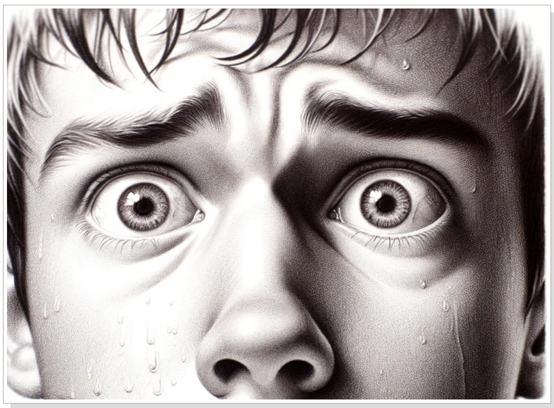
1. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement trois vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus trois vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

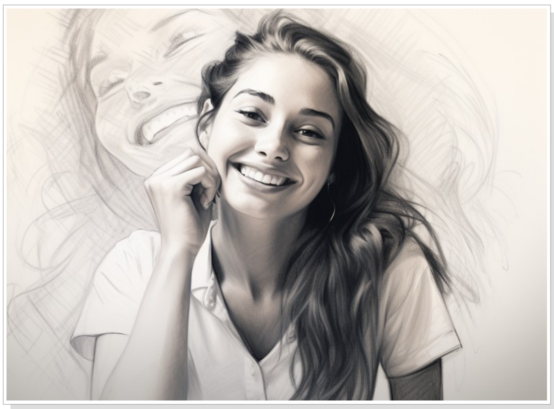
2. On choisit à présent un échantillon de *n* vaches dans cette région, *n* étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
Déterminer la valeur minimale de *n* pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.



CHATGPT A RÉUSSI CET EXAMEN …

VALIDÉ

… MAIS RIEN NE POURRA REMPLACER TA FIERTÉ



D'AVOIR ESSAYÉ ET, PARFOIS, DE RÉUSSIR