Nom : **Prénom** : **Classe** : T[le]OME

le vendredi 13 octobre 2023

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 35 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 5 minutes

1. On considère les matrices suivantes : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $P = C\,D$ et $P = (p_{i,j})$. Calculer (en détaillant) les coefficients $p_{2,1}$, $p_{2,3}$ et $p_{3,3}$.

2. Écrire la matrice $(a_{i,j})$ de dimension 4×5 définie par $a_{i,j} = j - 2$ si i est pair, $2i$ sinon.

EXERCICE 2 ≈ 5 minutes

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^2 = 2\,I_3 - A$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Démontrer que A est inversible et déterminer l'inverse de A, noté A^{-1}.

EXERCICE 3 ≈ 5 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant : $\begin{cases} -3x - 2z = 1 + 3y \\ -x + 2y + 3z = -2 \\ 4x - 2y = 3z \end{cases}$.

EXERCICE 4 ≈ 15 minutes

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1[er] janvier de l'année $2014 + n$, exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1[er] janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6\,x_n + 0{,}15\,y_n + 1 \\ y_{n+1} = 0{,}2\,x_n + 0{,}4\,y_n + 3 \end{cases}$.

Autrement dit : $U_{n+1} = A\,U_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dans cet exercice, si vous souhaitez calculer l'inverse d'une matrice, on vous demande de justifier en utilisant vos connaissances de cours. Autrement dit, la calculatrice n'est pas utile.

1. On note C la matrice colonne telle que $\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{B}$, et on pose, pour tout entier naturel n : $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n-\mathrm{C}$.
Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{AV}_n$.

2. On note $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.

On admet que :
- $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{V}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n=\begin{pmatrix} 0{,}25\times 0{,}3^n+0{,}75\times 0{,}7^n & 0{,}375(-0{,}3^n+0{,}7^n) \\ 0{,}5(-0{,}3^n+0{,}7^n) & 0{,}75\times 0{,}3^n+0{,}25\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

En calculant le coefficient de la première ligne de la matrice V_n, déterminer l'expression de x_n en fonction de n.