le mercredi 17 mai 2023

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 50 minutes. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

ATTENTION

*Une **réponse juste rapporte 1 point**, une **réponse fausse enlève 0,5 point**.*
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

EXERCICE 1 : VRAI / FAUX ≈ 10 minutes

1. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f décroissante. Alors (u_n) est décroissante.

2. La proposition « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire.

3. Pour tout réel k, la suite $\left(\frac{-2k}{n^3}\right)$ converge vers 0.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} -3(\sqrt{2})^n=-\infty$

5. La suite (2^n-3^n) n'admet pas de limite en $+\infty$.

6. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{n-1}{n+4}$. Cette suite est minorée par 1.

7. Si $u_n<v_n<w_n$ à partir d'un certain rang, et si (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors (v_n) converge vers l .

8. Une suite majorée converge.

9. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n=+\infty$.

10. Une suite qui converge est bornée.

11. Une suite (u_n) qui converge vers un réel α est minorée par α.

12. La somme $\frac{1}{200}+\frac{1}{201}+\dots+\frac{1}{300}$ comporte 100 termes.

13. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a un réel non nul. Alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

14. $\forall\ (x;y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\geqslant\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$.

15. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et a un réel non nul. Alors : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x}$.

16. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Cette fonction est convexe si et seulement f'' est positive sur I.

17. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Cette fonction est concave si et seulement sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

18. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

19. Si une fonction g est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors : $\left(\sqrt{g}\right)'=\dfrac{g'}{\sqrt{g}}$.

20. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in$ I. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

21. Si une fonction f est définie sur un intervalle I, alors pour toute suite (u_n) à valeurs dans I qui converge vers un réel l avec $l \in$ I : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$.

22. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\ln x}=x$

23. $\ln 0=1$

24. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x_1;x_2;x_3;\dots;x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x_k)$.

25. Soit X ~ $\mathcal{B}(n\,;p)$. Alors : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=n\,p\,(1-p)$.

26. Soit X ~ $\mathcal{B}(350\,;0{,}1)$. Alors : $\mathrm{p}(\mathrm{X}=100)=\binom{350}{100}0{,}9^{100}\times 0{,}1^{250}$.

27. La formule de symétrie des coefficients binomiaux est : $\binom{n}{p}=\binom{n}{p-n}$.

28. $\binom{5}{4}=5$

EXERCICE 2 : QCM (une seule bonne réponse) ≈ 20 minutes

1. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q avec q réel strictement positif.
On sait que $v_{12}=24$ et $v_{14}=48$. Alors : $q = \ldots$

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\ln 2$ D. 4

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$. Cette suite est :

A. arithmétique B. géométrique de raison e

C. ni arithmétique ni géométrique D. géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+7=\ldots$

A. 0 B. 1 C. -1 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5n^2}{n-10}=\ldots$

A. 0 B. -10 C. -5 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-\cos(n)=\ldots$

A. 0 B. 1 C. 2 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n=\ldots$

A. 0 B. -1 C. 1 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

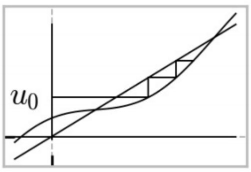
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}=\ldots$

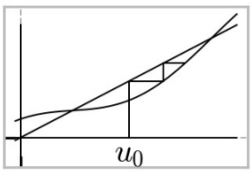
A. 0 B. -1 C. 1 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

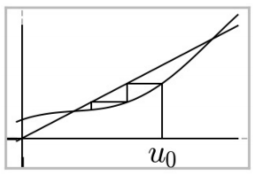
8. Soit q un réel tel que $q>1$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\ldots$

A. 0 B. -1 C. 1 D. $-\infty$ E. $+\infty$ F. n'existe pas

9. Les images suivantes montrent la courbe représentative d'une fonction f.
On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
La représentation graphique associée à cette situation est :

A. 

B. 

C. 

D. aucune des trois proposées

10. Soit a un réel. Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, on peut dire que :

A. la droite d'équation $y=a$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f
B. la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f
C. l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{5x^2+x+2} = \ldots$

A. 2 B. 5 C. $+\infty$ D. $\dfrac{2}{5}$ E. $\dfrac{3}{5}$ F. $-\dfrac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{1985}} = \ldots$

A. 0 B. 1 C. $+\infty$ D. $-\infty$

13. $3^{\sqrt{2}} = \ldots$

A. $(\sqrt{2})^3$ B. $\ln\left(e^{\sqrt{2}\ln(3)}\right)$ C. $e^{\sqrt{2\ln(3)}}$ D. $e^{\sqrt{2}\ln(3)}$

14. Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de l'inéquation $e^{2x-3} > 4$ est :

A. $\emptyset$ B. $\left]\dfrac{e^4+3}{2};+\infty\right[$ C. $\left]\dfrac{3}{2}+\ln 2;+\infty\right[$ D. $\mathbb{R}$

15. $\lim\limits_{x \to 2,\, x>2} \dfrac{\ln(x-2)}{x+3} = \ldots$

A. $-\infty$ B. 0 C. $-\dfrac{2}{3}$ D. $+\infty$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-7)}{\ln(x+5)} = \ldots$

A. $-\infty$ B. -1 C. 1 D. $+\infty$

17. On pose, pour tout réel $x > -1$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Alors, pour tout réel de $[-1;1]$: $f(x) - f(-x) = \ldots$

A. 0 B. $\dfrac{\ln 2}{x}$ C. $\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$ D. $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$

18. $\dbinom{3}{0} = \ldots$

A. 0 B. 1 C. 3 D. n'existe pas

EXERCICE 3 : QCM (une ou plusieurs bonnes réponses) ≈ 20 minutes

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0=10$. Alors : $u_n=100 \Leftrightarrow \ldots$

`A.` $n=15$ `B.` $n=18$ `C.` $n=20$ `D.` $n=100$

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0=10$. Alors : $v_n=100 \Leftrightarrow \ldots$

`A.` $n=\left(\dfrac{100}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$ `B.` $n=\dfrac{\ln 1{,}05}{\ln 10}$ `C.` $n=1{,}05^{10}$ `D.` $n=\dfrac{\ln 10}{\ln 1{,}05}$

3. On note : $\mathrm{A}=\dfrac{1}{20\times 21}+\dfrac{1}{21\times 22}+\ldots+\dfrac{1}{299\times 300}$.

`A.` $\displaystyle\sum_{i=20}^{300}\frac{1}{i\times(i+1)}$ `B.` $\displaystyle\sum_{i=20}^{299}\frac{1}{i\times(i+1)}$ `C.` $\displaystyle\sum_{i=20}^{299}\frac{1}{i\times(i-1)}$ `D.` $\displaystyle\sum_{i=21}^{300}\frac{1}{i\times(i-1)}$

4. On note, pour tout entier naturel n : $u_n=-\mathrm{e}^{-n}$.

`A.` (u_n) est majorée par 0 `B.` (u_n) est croissante

`C.` (u_n) converge `D.` $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-n}}$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$: $g(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\leqslant 1 \\ x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$.

`A.` g est continue sur $\mathbb{R}$ `B.` g est dérivable sur $\mathbb{R}$

`C.` $\displaystyle\lim_{x\to 1,\, x>1} g(x)=3$ `D.` $g(-1)=-2$

6. Pour tout réel x strictement positif : $\ln\sqrt{x}=\ldots$

`A.` $\ln\left(\mathrm{e}^{\ln\sqrt{x}}\right)$ `B.` $\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ `C.` $(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ `D.` $\dfrac{1}{2}\ln x$

7. $\ln(24)=\ldots$

`A.` $3\ln(2)+\ln(3)$ `B.` $\ln(6)+\ln(4)$ `C.` $\ln(2)\times\ln(12)$ `D.` $\ln(3)+8$

8. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{-x^2-2\ln x}{x}$.

`A.` $-\dfrac{x^4+4\ln(x)}{x^2}$ `B.` $g'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2}+2\dfrac{\ln x}{x^2}$

`C.` $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ `D.` $g(-1)=1$

9. Une primitive de $4x\mathrm{e}^{x^2+4}$ est :

`A.` $2\left(\mathrm{e}^{x^2+4}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ `B.` $4\mathrm{e}^{2x}$ `C.` $2\mathrm{e}^{x^2+4}-7$ `D.` $2x^2\mathrm{e}^{x^2+4}$

10. Une solution de l'équation différentielle $3y'+4y=5$ est :

`A.` $x\longmapsto -7\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}+\dfrac{4}{5}$ `B.` $x\longmapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}+\dfrac{5}{4}$

`C.` $x\longmapsto -7\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}-\dfrac{4}{5}$ `D.` $x\longmapsto -2\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}+\dfrac{5}{4}$

11. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre *p*. Alors :

A. $\mathrm{E}(\mathrm{X})=p$ B. $\mathrm{V}(\mathrm{X})=p$

C. $\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)=p$ D. $\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)=p$

12. En notant *n* et *p* deux entiers naturels tels que les coefficients binomiaux ci-dessous ont un sens :

A. $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$ B. $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$

C. $\binom{n+1}{p}+\binom{n+1}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$ D. $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$

13. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\ldots$

A. $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ B. $\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

C. $\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2-\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2)$ D. $\frac{1}{2}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2)$