Nom : **Prénom** : **Classe** : T^le^OME

le mardi 11 octobre 2022

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 55 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 5 minutes

1. On considère les matrices suivantes : $C = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -51 & -2 & 3 \\ 7 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $P = C\,D$ et $P = (p_{i,j})$. Calculer – en détaillant – les coefficients $p_{2,1}$ et $p_{3,2}$.

2. Écrire la matrice $(a_{i,j})$ de dimension 6×4 définie par $a_{i,j} = 2j-3$ si i est impair, $\frac{1}{2}$ sinon.

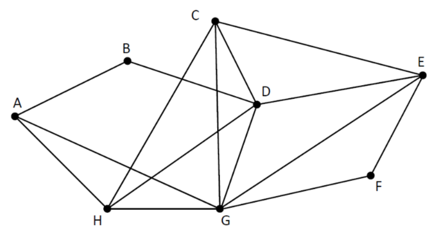
EXERCICE 2 ≈ 5 minutes

On considère une matrice M d'ordre 3 telle que $M^2 = -5\,M + 3\,I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
Démontrer que M est inversible et déterminer son inverse M^{-1} en fonction de M et I_3.

EXERCICE 3 ≈ 5 minutes

On considère le graphe non orienté suivant.

Comment pourrions-nous déterminer le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets C et G ? Expliquer rapidement.



EXERCICE 4 ≈ 10 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant : $\begin{cases} -5x-3z=-1-4y \\ -3x+2z-8y=-3 \\ -2x+3y=-9z \end{cases}$.

EXERCICE 5 ≈ 20 minutes

Dans cet exercice, si l'on souhaite calculer l'inverse d'une matrice, on pourra utiliser la calculatrice.

On définit les deux suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 2 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 9y_n + 5}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{3x_n - 5y_n + 3}{2} \end{cases}.$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ on a donc $U_{n+1} = A\,U_n + B$ avec $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On cherche une matrice colonne C telle que $C=AC+B$. Déterminer l'unique matrice C vérifiant cela.

2. Par la suite, on admettra que : $C=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. On pose, pour tout entier naturel n : $V_n=U_n-C$.

Démontrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}=AV_n$.

3. On note $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$. On admet que : $A=PDP^{-1}$.

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $A^n=PD^nP^{-1}$.

4. On admet que :

- $\forall\, n\in\mathbb{N},\ V_n=A^nV_0$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de A^n et en déduire x_n et y_n en fonction de n uniquement.