Nom : .... **Prénom** : ....

→ **RENDRE TOUT LE SUJET** ←
→ **AVEC VOTRE COPIE** ←

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
« BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées.

EXERCICE 1 [6 points]

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel *n* par :

$$u_0=v_0=1 \ ; \ u_{n+1}=u_n+v_n \ ; \ v_{n+1}=2u_n+v_n \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

1. a) Calculer u_1 et v_1 .

b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 1$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $u_n \geqslant n+1$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On pose, pour tout entier naturel *n* $r_n=\dfrac{v_n}{u_n}$.

On admet que, pour tout entier naturel *n* : $r_n^2=2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n* : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel *n* : $r_{n+1}=\dfrac{2+r_n}{1+r_n}$.

e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

La valeur de *n* renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

EXERCICE 2 [4 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie <u>le numéro</u> de la question, <u>la lettre</u> de la réponse choisie <u>et la réponse choisie</u>. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel *n* : $u_n=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $v_n=1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel *n*, vérifie : $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

On peut affirmer que :

A. (u_n) et (v_n) sont géométriques.

B. La suite (w_n) converge vers 1.

C. La suite (u_n) est minorée par 1.

D. La suite (w_n) est croissante.

NOM :
Prénom :

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f'(x)=2x\,\mathrm{e}^{x^2}$. **B.** $f'(x)=(1+2x)\mathrm{e}^{x^2}$.

C. $f'(x)=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$. **D.** $f'(x)=2x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$.

3. On considère une fonction h continue sur $[-1;1]$ telle que : $h(-1)=0$, $h(0)=2$, $h(1)=0$.

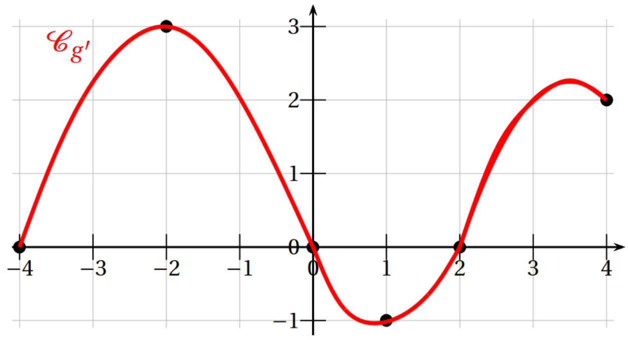
On peut affirmer que :

A. h est croissante sur $[-1;0]$. **B.** h est positive sur $[-1;1]$.

C. Il existe au moins un réel a dans $[0;1]$ tel que $h(a)=1$.

D. L'équation $h(x)=1$ admet exactement deux solutions dans $[-1;1]$.

4. On suppose que g est une fonction dérivable sur $[-4;4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



On peut affirmer que :

A. g admet un maximum en -2.

B. g est croissante sur $[1;2]$.

C. g est convexe sur $[1;2]$.

D. g admet un minimum en 0.

EXERCICE 3 [5 points]

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f_k(x)=k\,x\,\mathrm{e}^{-kx}$. On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude du cas $k = 1$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

3. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique de la page suivante les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.

1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.

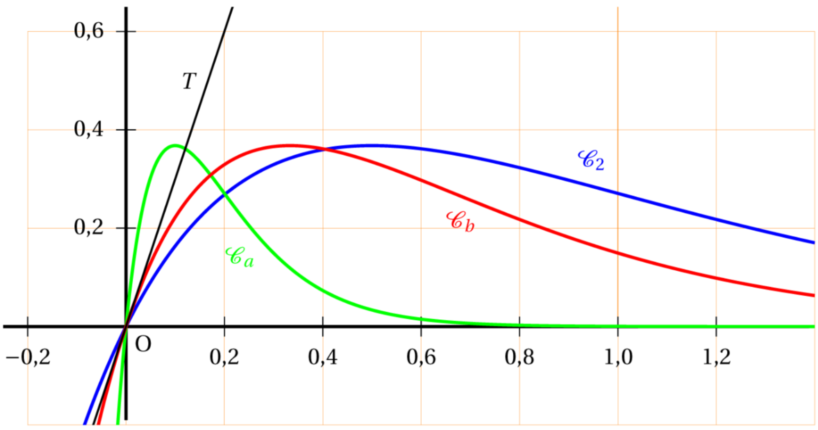
2. a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a : $f_k'(x)=k(1-k\,x)\mathrm{e}^{-kx}$.

b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.



EXERCICE 4 [5 points]

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons : 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école. Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier », A l'évènement « le candidat a été admis à l'école », D et A les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.

On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école.

On donnera une réponse arrondie au centième.

c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école.

On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?