

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 35 minutes. Calculatrice AUTORISÉE en mode examen.

EXERCICE 1

≈ 10 minutes

1. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer, en détaillant, les matrices A^2 et $2A - 3B$.

2. On considère les matrices suivantes : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $P = CD$ et $P = (p_{i,j})$. Calculer (en détaillant) les coefficients $p_{1,2}$, $p_{2,3}$ et $p_{3,3}$.

3. Écrire la matrice $(a_{i,j})$ de dimension 5×6 définie par $a_{i,j} = i - 1$ si i est pair, 7 sinon.

EXERCICE 2

≈ 7 minutes

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1} .

2. a. Donner, sans justifier, la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire, en justifiant, que A est inversible.

EXERCICE 3

≈ 8 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -6x - 3z = 3y - 1 \\ -2x + 3z - 5y = -2 \\ -4x + 2y = -3z \end{cases}$$

EXERCICE 4

≈ 10 minutes

On note (U_n) une suite de matrices carrées d'ordre n définie par : $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. On note C la matrice colonne telle que $C = AC + B$, et on pose, pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - C$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = AV_n$.

2. On admet qu'il existe deux matrices D et P telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $A^n = PD^nP^{-1}$.