SÉANCE DU JEUDI 29 AVRIL 2021

Rappel : si question(s) sur cette séance, la visio est fixée au jeudi 29 avril de 14h00 à 15h00.
Le lien d'accès sera sur le site (pensez à vous connecter pour voir le lien).

I. Exercices à chercher

138 p389, 139 p389, 136 p389

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

• 138 p389

a. $\mathrm{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ldots$ donc $\mathrm{I}_0=1$. De même (à faire) : $\mathrm{J}_0=1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• On pose $u(x)=\mathrm{e}^{-nx}$ et $v'(x)=\sin x$; $u'(x)=-n\mathrm{e}^{-nx}$ et $v(x)=-\cos x$.

D'après l'IPP : $\mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-nx}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(n\mathrm{e}^{-nx}\cos x\right)\mathrm{d}x =\ldots$ d'où $\mathrm{I}_n=1-n\mathrm{J}_n$.

• On pose $f(x)=\mathrm{e}^{-nx}$ et $g'(x)=\cos x$; $f'(x)=-n\mathrm{e}^{-nx}$ et $g(x)=\sin x$.

D'après l'IPP : $\mathrm{J}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^{-nx}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-n\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right)\mathrm{d}x =\ldots$ d'où $\mathrm{J}_n=\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}+n\mathrm{I}_n$.

c. En résolvant le système (à faire) : $\mathrm{I}_n=\dfrac{1-n\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$ et $\mathrm{J}_n=\dfrac{\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}+n}{n^2+1}$.

d. • Par composition de limites (à détailler) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}=0$.

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1=+\infty$.

Donc, par produit, différence et quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n=0$.

• $\mathrm{J}_n=\dfrac{n\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}+1\right)}{n\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}+1}{n+\dfrac{1}{n}}$. Par quotient et somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}+1=1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\dfrac{1}{n}=+\infty$, donc par quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n=0$.

• 139 p389

1. a. $f(x)-g(x)=\dfrac{10}{(x+1)^2}$ donc $f(x)>g(x)$. Donc C_f est strictement au-dessus de C_g.

b. (à faire) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$.

2. a. $A_p=\int_0^p (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$

b. $A_p=\int_0^p \dfrac{10}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Or, $\dfrac{10}{(x+1)^2}$ est de la forme $10\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x+1$ donc :

$\mathrm{A}_p=\left[10\times\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)\right]_0^p=-\dfrac{10}{p+1}+10$.

Ce dernier résultat s'exprimer en unités d'aire. Or : 1 u.a. = 0,5 cm² (d'après l'énoncé) donc :

$\mathrm{A}_p=\left(-\dfrac{10}{p+1}+10\right)\times 0{,}5$ cm² *ie* $\mathrm{A}_p=5-\dfrac{5}{p+1}$ cm².

c. Facile. L'aire du domaine se rapproche de 10 u.a. lorsque p tend vers $+\infty$.

3.
```
def seuil(a):
    p=1
    while 10-10/(p+1)<10-a:
        p+=1
    return p
```

• 136 p389

a. Valeur moyenne sur $[0;9]$:

$\dfrac{1}{9}\int_0^9 \mathrm{C}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{9}\int_0^9 10\mathrm{e}^{-0{,}15t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{10}{-0{,}15}\int_0^9 -0{,}15\mathrm{e}^{-0{,}15t}\mathrm{d}t = -\dfrac{200}{27}[\mathrm{e}^{-0{,}15t}]_0^9$

$= \ldots = \dfrac{200}{27}(1-\mathrm{e}^{-1{,}35})$

b. La concentration moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang du patient pendant les 9 heures qui suivent l'injection est d'environ $5{,}49\,\mathrm{mg.L}^{-1}$.