SÉANCE DU MARDI 27 AVRIL 2021

Rappel : si question(s) sur cette séance, la visio est fixée au mercredi 28 avril de 11h00 à 12h00.
Le lien d'accès sera sur le site (pensez à vous connecter pour le voir).

I. Exercices à chercher

105 p386, 13 p373, 107 p386, 127 p388

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

• 105 p386

$x \geqslant x^2 \Leftrightarrow x^2 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geqslant 0$, et sur $[0;1]$ on a $x \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ d'où $x(x-1) \geqslant 0$.
Donc : $\forall x \in [0;1],\ x \geqslant x^2$.

En divisant par $1+x^2$, qui est un nombre strictement positif sur $[0;1]$: $\dfrac{x}{1+x^2} \geqslant \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *ie* $\mathrm{I} \geqslant \mathrm{J}$.

• 13 p386

$x \in \mathbb{R}^+$

a. $\forall t \in [0;x],\ 1 \leqslant \mathrm{e}^t$

donc : $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

ie $[t]_0^x \leqslant [\mathrm{e}^t]_0^x$ *ie* $x - 0 \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0$ *ie* $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

Remarque : cette inégalité a déjà été vu à la séance précédente, elle se déduit par exemple de la convexité de la fonction exp.

b. En fixant x un réel de $\mathbb{R}^+$: $\forall t \in [0;x],\ 1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$ (question précédente)

donc : $\displaystyle\int_0^x (1+t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

ie $\left[t + \dfrac{t^2}{2}\right]_0^x \leqslant [\mathrm{e}^t]_0^x$ *ie* $x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0$ *ie* $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^x$.

• 107 p386

Si $1 \leqslant x \leqslant 2$: $1^2 \leqslant x^2 \leqslant 2^2$ (fonction carré croissante sur $[1;2]$) *ie* $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$
d'où : $2 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 5$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $[2:5]$: $\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{1+x^2} \geqslant \dfrac{1}{5}$.

D'où : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^2 \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x$ *ie* $\displaystyle\left[\frac{1}{2}x\right]_1^2 \geqslant \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \left[\frac{1}{5}x\right]_1^2$ *ie* $\displaystyle\frac{2}{2} - \frac{1}{2} \geqslant \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$

ie $\displaystyle\frac{1}{2} \geqslant \int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{5}$.

• **127 p388**

a. On pose $u(x)=x^2$ et $v'(x)=e^x$; $u'(x)=2x$ et $v(x)=e^x$.

D'après l'IPP : $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx = \ldots = e-2\int_0^1 x e^x \, dx$.

Pour calculer $\int_0^1 x e^x \, dx$, on pose $f(x)=x$ et $g'(x)=e^x$; $f'(x)=1$ et $g(x)=e^x$.

D'après l'IPP : $\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = \ldots = 1$.

D'où : $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e-2$.

b. *Sur cette question, je ne détaille pas la rédaction des IPP.*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx &= [-x^2 \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-2x\cos(x)) \, dx \\
&= -\pi^2 \times (-1) + 2\int_0^\pi x \cos(x) \, dx \\
&= \pi^2 + 2\int_0^\pi x\cos(x) \, dx .
\end{aligned}$$

Or :
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos(x) \, dx &= [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) \, dx \\
&= 0-[-\cos(x)]_0^\pi = -(-\cos(\pi)+\cos(0)) = -(1+1) = -2 .
\end{aligned}$$

D'où : $\int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx = \pi^2 - 4$.