SÉANCE DU LUNDI 26 AVRIL 2021

Rappel : si question(s) sur cette séance, la visio est fixée au lundi 26 avril de 14h00 à 15h00.
Le lien d'accès vers la visio sera toujours sur le site (il faut être connecté).

I. Correction des exercices à faire

• 78 p384

$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}[\ln|3x+2|]_0^1 = \ldots = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

$\rightarrow \int_0^2 \sqrt{3x+2}\,dx = ?$

Sans doute une erreur du manuel… En effet, nous avons vu dans le cours qu'une primitive de $u'u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ lorsque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Ici, $\sqrt{3x+2} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times 3(3x+2)^{\frac{1}{2}}$ donc on reconnaît une forme $\frac{1}{3}u'u^{\frac{1}{2}}$ mais cela reviendrait à appliquer la formule ci-dessus lorsque $n = \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas au programme de Terminale… Vous pouvez le faire si vous le souhaitez… (mais ce n'est pas à connaître).

Après calcul, vous trouverez : $\int_0^2 \sqrt{3x+2}\,dx = \frac{28\sqrt{2}}{9}$.

$\rightarrow \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{2e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(3)} \frac{2e^x}{2e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|2e^x+1|]_0^{\ln(3)} = \ldots = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)$

$\rightarrow \int_1^2 t e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^2 -2t e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}[e^{-t^2}]_1^2 = \ldots = \frac{e^{-1}-e^{-4}}{2}$

• 79 p384

a) $\int_0^1 6x(x^2-1)^2\,dx = 3\int_0^1 \underbrace{2x(x^2-1)^2}_{\text{forme } u'u^2}\,dx$

$= 3\left[\frac{1}{3}(x^2-1)^3\right]_0^1 = \ldots = 1.$

b) $\int_1^{e^2} \frac{\ln t}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \underbrace{\frac{1}{t}\ln(t)}_{\text{forme } u'u}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^{e^2} = \ldots = 1.$

c) $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\int_0^2 \underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}_{\text{forme } \frac{u'}{\sqrt{u}}}\,dx$

$= 2\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \ldots = 4\sqrt{5}-4.$

d) $\int_1^2 \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -\int_1^2 \underbrace{-\sin x\, e^{\cos x}}_{\text{forme } u'e^u}\,dx$

$= -\left[e^{\cos x}\right]_1^2 = \ldots = e^{\cos 1} - e^{\cos 2}$

• **123 p388**

a. On pose $u(x)=3x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{6x}$; $u'(x)=3$ et $v(x)=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x}$.

D'après l'IPP : $\int_0^2 3x\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x=[3x\times\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x}]_0^2-\int_0^2 \frac{3}{6}\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$ $=\ldots=$ $\frac{11}{12}\mathrm{e}^{12}+\frac{1}{12}$.

b. On pose $u(x)=2x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{-3x}$; $u'(x)=2$ et $v(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$.

D'après l'IPP : $\int_0^2 3x\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x=[3x\times\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x}]_0^2-\int_0^2 \frac{3}{6}\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$ $=\ldots=$ $-\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-3}-\frac{4}{9}\mathrm{e}^{3}$.

• **124 p388**

a. /!\ **Erreur d'énoncé** dans certains manuels, c'était $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ qu'il fallait calculer.

On pose $u(x)=\sqrt{x+1}$ et $v'(x)=1$; $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $v(x)=x+1$.

choisi pour que $u'v(x)=\frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}}{2}$ *dans l'IPP*

D'après l'IPP : $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=[(x+1)\sqrt{x+1}]_0^1-\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{2}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

d'où : $\mathrm{I}=2\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\mathrm{I}$

$\frac{3}{2}\mathrm{I}=2\sqrt{2}-1$

$\mathrm{I}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

b. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$; $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{x^2}{2}$.

D'après l'IPP : $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x=[\frac{x^2}{2}\ln x]_0^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $=\ldots=$ $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

II. Exercices à chercher

88, 89 p385 et 93 p385 (utilisation de Geogebra)

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

• **88 p385**

a. Pas difficile, il suffit de mettre $2x-1+\frac{1}{x+1}$ au même dénominateur.

b. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ $=$ $\int_0^1 \left(2x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ $=$ $[x^2-x+\ln|x+1|]_0^1$ $=\ldots=$ $\ln 2$.

c. (question mal formulée, je pense qu'on attendait de vous de vérifier le résultat à la calculatrice)
$\mathrm{I}\approx 0{,}6931$

• 89 p385

a. Pas difficile, il suffit de mettre $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}$ au même dénominateur $(x+1)(x+2)(x+3)$.

b. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

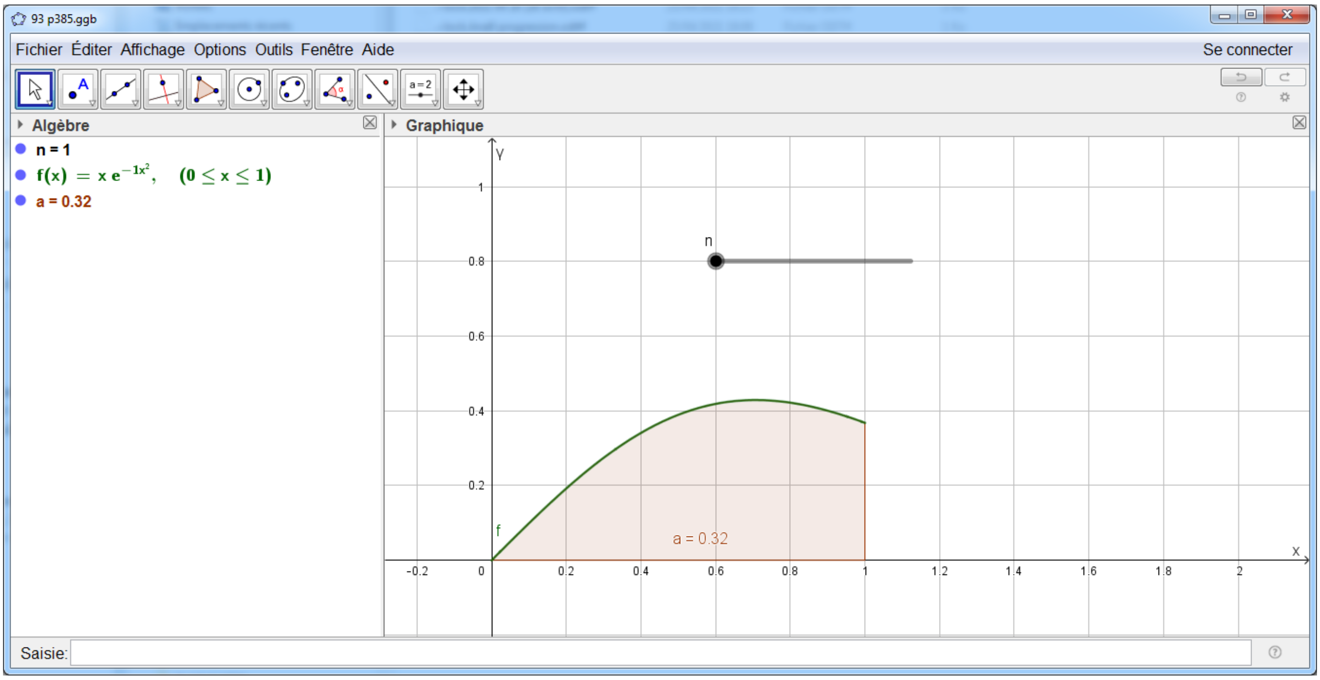
$= \left[\ln|x+1|+2\ln|x+2|-3\ln|x+3|\right]_0^2 = \ldots = \boxed{2\ln 2+4\ln 3-3\ln 5}$.

penser que $\ln 4=\ln(2^2)=2\ln 2$

• 93 p385 (utilisation de Geogebra)

1. Pour tout entier non nul n, f_n est positive sur $[0;1]$ dont I_n est l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_n$ sur l'intervalle $[0;1]$.

2. a.



Si question sur comment réaliser un tel fichier Geogebra, la poser en visio.

b. Conjecture : (I_n) semble strictement décroissante et convergente vers 0.

3. a. $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{-2n}\displaystyle\int_0^1\left(-2nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{-2n}\left[\mathrm{e}^{-nx^2}\right]_0^1 = \ldots = \boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{2n}}$.

b. Par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$. Donc par différence et quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0}$.

Pour montrer que (I_n) est strictement décroissante, une première méthode consiste à :

- écrire que $\mathrm{I}_n=\dfrac{\mathrm{e}^n-1}{2n\mathrm{e}^n}$ (pour cela, se rappeler que $\mathrm{e}^{-n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$)
- démontrer que $\mathrm{I}_n>0$ pour tout entier n non nul
- démontrer que $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}=\dfrac{n}{n+1}\times\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}^n-1}$.

Or, $n<n+1$ et $\mathrm{e}^{n+1}-1<\mathrm{e}^n-1$ (car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
avec $\mathrm{e}^n-1>0$ puisque $\mathrm{e}^n>\mathrm{e}^0$ pour tout entier n non nul (même argument que ci-dessus)

donc, puisque $n+1>0$ et $\mathrm{e}^n-1>0$: $\dfrac{n}{n+1}<1$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}^n-1}<1$.

Par produit, on a alors : $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}<1$ et donc $\boxed{\mathrm{I}_{n+1}<\mathrm{I}_n}$, d'où la stricte décroissante de (I_n).

Une autre méthode consistait à étudier la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{2x}$ sur $]0;+\infty[$.

En dérivant, on obtient rapidement : $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(x+1)-1}{2x^2}$.

Or, $\mathrm{e}^{-x}(x+1)-1<0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}(x+1)<1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}<1 \Leftrightarrow x+1<\mathrm{e}^x$.

Et l'on sait que cette dernière inégalité est vraie (on l'a vu en classe, mais cela se retrouve rapidement puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc elle est au-dessus de ses tangentes, donc en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, qui est la droite d'équation $y=x+1$).
D'où $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ et par conséquent g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, ce qui prouve que la suite (I_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.