On note $⟦a;b⟧$ l'ensemble des entiers n tels que $a \leqslant n \leqslant b$.

I. Loi uniforme discrète

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la ***loi uniforme discrète*** sur $⟦a;b⟧$ si :

pour tout entier k de $⟦a;b⟧$, $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$.

Par exemple avec $⟦a;b⟧=⟦2;5⟧$: cet intervalle contient $5-2+1=4$ entiers. Si on associe à chaque entier de cet ensemble la même probabilité, alors c'est $\dfrac{1}{4}$ et la variable aléatoire correspondante suit la loi uniforme discrète sur $⟦2;5⟧$.

PROPRIÉTÉ

Si X suit la loi uniforme sur $⟦a;b⟧$, alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{a+b}{2}$.

<u>Démonstration</u> :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{k=a}^{b} k\times\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=a}^{b} k\times\frac{1}{b-a+1}=\frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} k$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} k=(b-a+1)\times\frac{a+b}{2}$ (somme des termes d'une suite arithmétique)

donc $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{1}{b-a+1}\times(b-a+1)\times\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$.

Par exemple, en tirant aléatoirement un entier compris entre 2 et 5, l'espérance correspondante sera 3,5.

II. Loi binomiale et coefficients binomiaux

DÉFINITIONS

• Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire à deux issues : le succès ou l'échec.

• En notant p la probabilité du succès d'une épreuve de Bernoulli, et X la variable aléatoire qui associe un succès à 1 et un échec à 0 : X suit la ***loi de Bernoulli de paramètre p***.

Autrement dit : $\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)=1-p$ et $\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)=p$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=p$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=p(1-p)$.

<u>Démonstrations</u> : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)+1\times\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)=0+p=p$

et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)(0-p)^2+\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)(1-p)^2=(1-p)p^2+p(1-p)^2=\ldots=(1-p)p$

DÉFINITION

Un ***schéma de Bernoulli de paramètres n et p*** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où p est la probabilité du succès.

DÉFINITION

On appelle ***partie*** d'un ensemble E un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E. On dit que F est inclus dans E (ou que c'est un ***sous-ensemble*** de E), et on note F ⊂ E.

On dit aussi parfois que F est une ***combinaison*** de E.

PROPRIÉTÉ

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès.

En notant $\binom{n}{k}$ le nombre de façons d'obtenir k succès parmi les n épreuves, on a, pour tout entier k compris entre 0 et n : $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

DÉFINITION

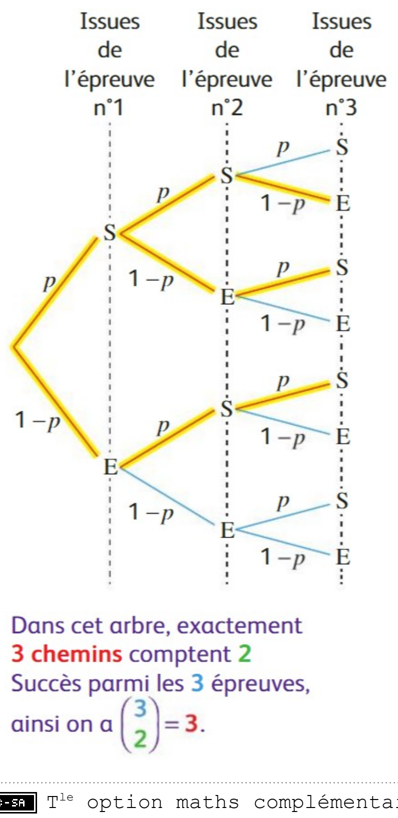
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, et on note : $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$.

Démonstration : en classe ou en vidéo (< 10 min) sur mathemathieu.fr/tsm-seilb-demo1

REMARQUE : $\binom{n}{k}$ est ce qu'on appelle un ***coefficient binomial*** et cela se lit « k parmi n ».

On note aussi parfois C_n^k.

EXEMPLE C1



De la même manière :

$\binom{3}{1}=$ et $\binom{3}{3}=$

← Source : Déclic Tle 2020, éd. Hachette

PROPRIÉTÉS

• ***Symétrie*** : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$.

• Relation du ***triangle de Pascal*** : $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$.

Démonstrations :

• Choisir p éléments parmi n revient à observer ceux qu'on ne choisit pas…

• Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Soit a un élément de E.

Il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ parties de E à $p+1$ éléments qui contiennent a, et $\begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix}$ parties de E à $p+1$ éléments qui ne contiennent pas a. D'où le résultat.

Triangle de Pascal : *du nom de Blaise Pascal (1623 – 1662), mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français (né à Clermont-Ferrand).*

$\downarrow n \quad p \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1		1					
3	1			1				
4	1				1			
5	1					1		
6	1						1	
7	1							1

EXEMPLE C2

Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite un dé équilibré à six faces.
Le joueur gagne lorsque le 1 apparaît au moins trois fois sur les quatre lancers.
a. Justifier que ce jeu peut être modélisé par un schéma de Bernoulli.
b. Représenter ce jeu par un arbre pondéré.
c. Calculer la probabilité des événements : A : « le joueur n'obtient aucun 1 »
B : « le joueur obtient exactement un 1 »
C : « le joueur obtient exactement deux 1 ».
d. Calculer la probabilité pour un joueur de gagner à ce jeu.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soit X ~ $\mathcal{B}(n\,;p)$. Alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\,p$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=n\,p(1-p)$.

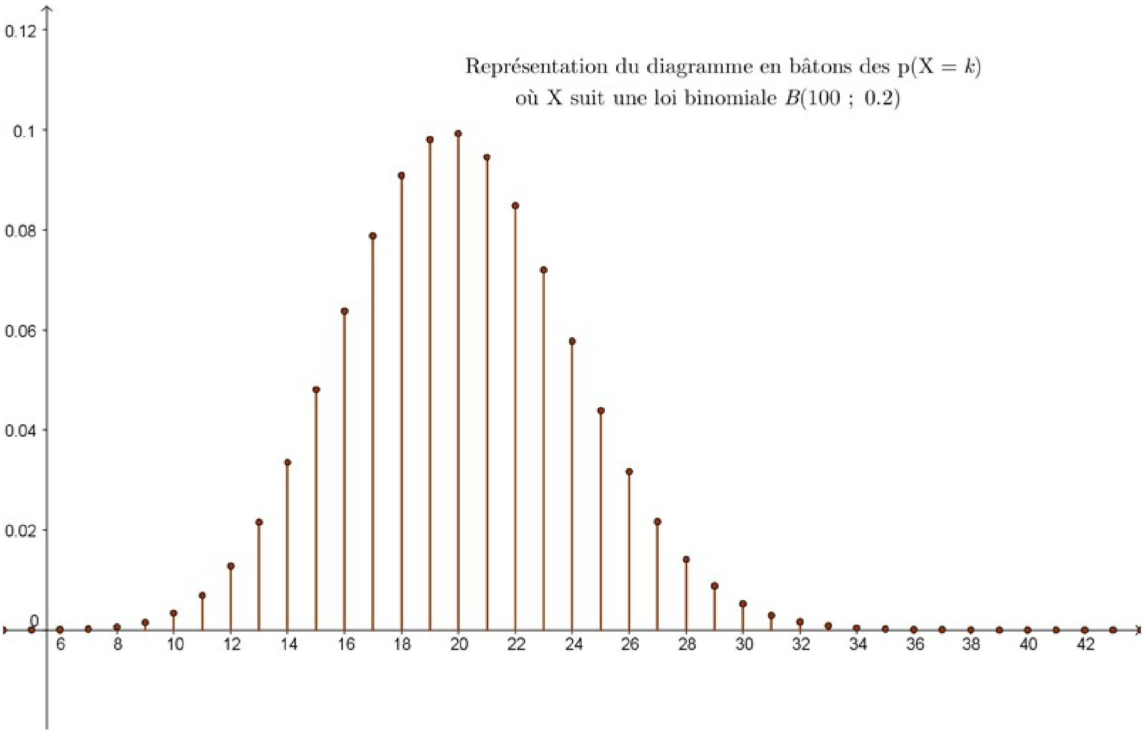
EXEMPLE C3

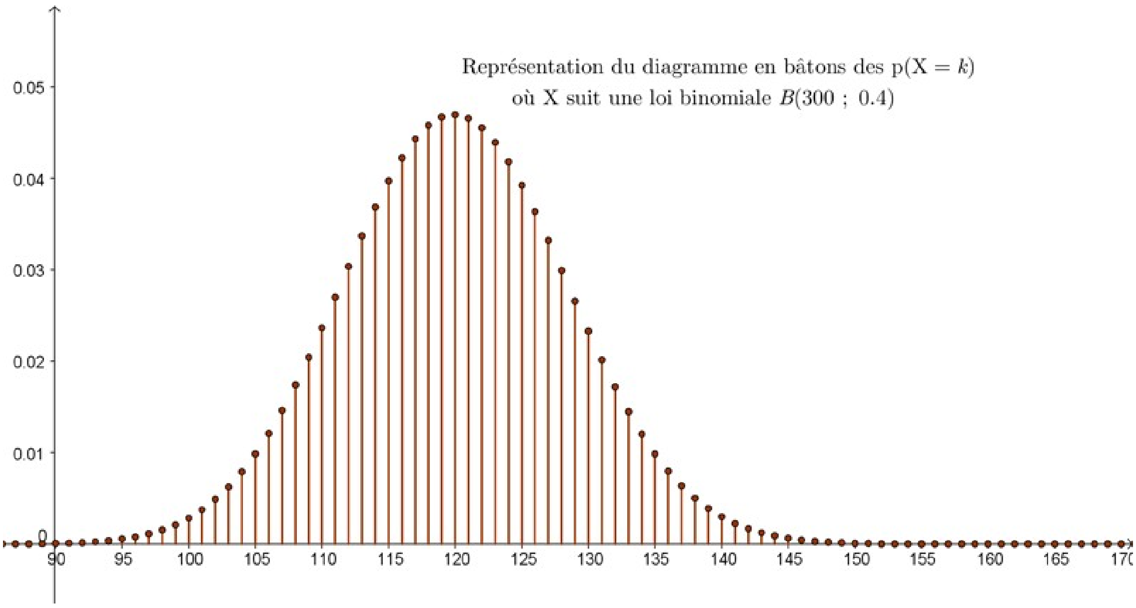
Dans un examen, un QCM comporte huit questions.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.
La variable aléatoire X donne le nombre total de bonnes réponses.
On arrondira les résultats au millième.
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
3. Calculer la probabilité d'avoir :
- **a.** quatre bonnes réponses ;
- **b.** au plus cinq bonnes réponses ;
- **c.** entre deux et cinq bonnes réponses.

EXEMPLE C4

Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives.
Pour un convive quelconque, il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(45\,;0,8)$.
1. a. Dans une feuille de calcul d'un tableur, afficher les valeurs de k et les probabilités $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)$ correspondantes pour $0\leqslant k\leqslant 45$.
b. Donner les valeurs de k pour lesquelles $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)\geqslant 0{,}1$.
2. Toujours à l'aide du tableur, afficher dans un tableau les probabilités cumulées croissantes $\mathrm{p}(\mathrm{X}\leqslant k)$ pour $0\leqslant k\leqslant 45$.
3. a. Déterminer le plus petit nombre entier a tel que $\mathrm{p}(\mathrm{X}\leqslant a)\geqslant 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte.
b. Déterminer le plus grand nombre entier b tel que $\mathrm{p}(\mathrm{X}\leqslant b)\leqslant 0{,}1$.
c. Déterminer un intervalle $[\![c\,;d]\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathrm{p}(c\leqslant \mathrm{X}\leqslant d)\geqslant 0{,}95$.

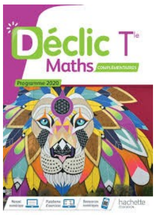
Représentations graphiques





Fichier Geogebra pour visualiser : https://www.geogebra.org/m/NsF2TCPg

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.208
- QCM 17 questions corrigées → p.209