T[le] spé

SOMMES DE VARIABLES ALÉATOIRES

On considère une expérience aléatoire et on notera Ω l'univers des possibles (supposé fini).

I. Définitions et propriétés

DÉFINITION

Une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ.

DÉFINITION

Deux variables aléatoires X et Y sont ***indépendantes*** si pour tous réels i et j, les événements $\{X=i\}$ et $\{Y=j\}$ sont indépendants.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la loi de probabilité de la variable aléatoire somme X+Y est donnée par : $\mathrm{p}(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}\mathrm{p}(X=i)\,\mathrm{p}(Y=j)$.

II. Indicateurs d'une combinaison linéaire de variables aléatoires

PROPRIÉTÉS LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE

Soient X et Y des variables aléatoires et a un réel :

$$E(aX)=aE(X) \text{ et } E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

En particulier : $E(X+a)=E(X)+a$.

Démonstrations :

On note $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_r\}$ et $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_s\}$.

• Si $a=0$, $E(aX)=aE(X)$ est évident. Supposons donc $a\neq 0$.

$$E(aX)=\sum_{i=1}^{s} a\,x_i\,\mathrm{p}(aX=a\,x_i)=\sum_{i=1}^{s} a\,x_i\,\mathrm{p}(X=x_i)=a\sum_{i=1}^{s} x_i\,\mathrm{p}(X=x_i)=aE(X).$$

• Si l'on suppose que X et Y sont définies sur le même univers Ω, alors X+Y est aussi définie sur Ω et pour tout ω de Ω : $(X+Y)(\omega)=X(\omega)+Y(\omega)$.

De plus, on peut utiliser une autre écriture de l'espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{r} X(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\})$

$$\begin{aligned}E(X+Y)=\sum_{i=1}^{r}(X+Y)(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\}) &=\sum_{i=1}^{r}(X(\omega_i)+Y(\omega_i))\,\mathrm{p}(\{\omega_i\})\\ &=\sum_{i=1}^{r} X(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\})+Y(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\})\\ &=\sum_{i=1}^{r} X(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\})+\sum_{i=1}^{r} Y(\omega_i)\,\mathrm{p}(\{\omega_i\}) \quad =E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS

Soient X et Y des variables aléatoires et a un réel.

Alors : $\mathrm{V}(a\mathrm{X})=a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors : $\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})$

et en particulier : $\mathrm{V}(\mathrm{X}+a)=\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

Démonstrations :

On note $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\dots;\omega_r\}$ et $\mathrm{X}(\Omega)=\{x_1;x_2;\dots;x_s\}$.

• Si $a=0$, $\mathrm{V}(a\mathrm{X})=a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$ est évident. Supposons donc $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(a\mathrm{X})&=\sum_{i=1}^{s}(a x_i-\mathrm{E}(a\mathrm{X}))^2\mathrm{p}(a\mathrm{X}=a x_i)\\&=\sum_{i=1}^{s}a^2(x_i-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)\\&=a^2\sum_{i=1}^{s}(x_i-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)\quad=a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})\end{aligned}$$

• Rappelons que : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2$.

Alors : $\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{E}((\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2+2\mathrm{XY}+\mathrm{Y}^2)-(\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)+2\mathrm{E}(\mathrm{XY})+\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2-2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2\\&=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2+\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2+2\mathrm{E}(\mathrm{XY})-2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})\\&=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})+2\mathrm{E}(\mathrm{XY})-2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y}).\end{aligned}$$

On admet ici[1] que $\mathrm{E}(\mathrm{XY})=\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ lorsque X et Y sont indépendantes, d'où le résultat.

Sauriez-vous le démontrer ? C'est ce qu'on appelle la formule de König-Huygens

III. Application à la loi binomiale

DÉFINITION

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables indépendantes suivant cette loi.

REMARQUE : la loi binomiale de paramètres n et p est la somme de n variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

PROPRIÉTÉ

Soit X ~ $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)$.

Cette propriété a déjà été démontrée au chapitre *Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale*, mais nous allons ici la démontrer d'une autre manière.

Démonstration :

Commençons par rappeler que l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est p, et que sa variance est $p(1-p)$.

1 Nous pourrons le démontrer en approfondissement.

• $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p

d'où : $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$.

• De même, puisque les Y_i sont indépendantes :

$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$.

PROPRIÉTÉ

Soient deux variables X_1 et X_2 suivant une loi binomiale avec :

$$X_1 \sim \mathcal{B}(n;p) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{B}(m;p) .$$

Alors : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n+m;p)$.

Démonstration :

X_1 est la somme d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p et X_2 est la somme d'un échantillon de taille p de la loi de Bernoulli de paramètre p, donc $X_1 + X_2$ est la somme d'un échantillon de taille $n+m$ de la loi de Bernoulli de paramètre p
d'où le résultat.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

• Fiche bilan → p.444

• QCM 11 questions corrigées → p.445

• Exercices corrigés → 30 à 35 p.446

• Exercice type Bac guidé & corrigé → 110 p.458

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tsm-sva-ym