

On considère une expérience aléatoire et on notera Ω l'univers des possibles (supposé fini).

I. Définitions et propriétés

DÉFINITION

Une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} .

DÉFINITION

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous réels i et j , les événements $\{X=i\}$ et $\{Y=j\}$ sont indépendants.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X+Y$ est donnée par : $p(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} p(X=i) p(Y=j)$

II. Indicateurs d'une combinaison linéaire de variables aléatoires

PROPRIÉTÉS LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE

Soient X et Y des variables aléatoires et a un réel :

$$E(aX) = aE(X) \text{ et } E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

En particulier : $E(X+a) = E(X) + a$.

Démonstrations :

On note $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_r\}$ et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_s\}$.

• Si $a=0$, $E(aX) = aE(X)$ est évident. Supposons donc $a \neq 0$.

$$E(aX) = \sum_{i=1}^s a x_i p(aX = a x_i) = \sum_{i=1}^s a x_i p(X = x_i) = a \sum_{i=1}^s x_i p(X = x_i) = aE(X).$$

$$\begin{aligned} \bullet E(X+Y) &= \sum_{i=1}^r (X+Y)(\omega_i) p(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^r (X(\omega_i) + Y(\omega_i)) p(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^r X(\omega_i) p(\{\omega_i\}) + \sum_{i=1}^r Y(\omega_i) p(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^r X(\omega_i) p(\{\omega_i\}) + \sum_{i=1}^r Y(\omega_i) p(\{\omega_i\}) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS

Soient X et Y des variables aléatoires et a un réel.

Alors : $V(aX) = a^2 V(X)$.

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

et en particulier : $V(X+a) = V(X)$.

Démonstrations :

On note $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_r\}$ et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_s\}$.

• Si $a=0$, $V(aX) = a^2 V(X)$ est évident. Supposons donc $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} V(aX) &= \sum_{i=1}^s (ax_i - E(aX))^2 p(aX = ax_i) \\ &= \sum_{i=1}^s a^2 (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^s (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

• Rappelons que : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y). \end{aligned}$$

On admet ici¹ que $E(XY) = E(X)E(Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes, d'où le résultat.

Sauriez-vous le démontrer ? C'est ce qu'on appelle la formule de König-Huygens

III. Application à la loi binomiale

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables indépendantes suivant cette loi.

Remarque : la loi binomiale de paramètres n et p est la somme de n variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p .

PROPRIÉTÉ

Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$. Alors : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Cette propriété a déjà été démontrée au chapitre *Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale*, mais nous allons ici la démontrer d'une autre manière.

Démonstration :

Commençons par rappeler que l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est p , et que sa variance est $p(1-p)$.

1 Nous pourrions le démontrer en approfondissement.

• $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\text{d'où : } E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

• De même, puisque les Y_i sont indépendantes :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

PROPRIÉTÉ

Soient deux variables X_1 et X_2 suivant une loi binomiale avec :

$$X_1 \sim \mathcal{B}(n; p) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{B}(m; p).$$

Alors : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n+m; p)$.

Démonstration :

X_1 est la somme d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p et X_2 est la somme d'un échantillon de taille m de la loi de Bernoulli de paramètre p , donc $X_1 + X_2$ est la somme d'un échantillon de taille $n+m$ de la loi de Bernoulli de paramètre p
d'où le résultat.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.444
- QCM 11 questions corrigées → p.445
- Exercices corrigés → 30 à 35 p.446
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 110 p.458

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : [tsm-sva-ym](https://www.mathemathieu.fr)