

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 55 minutes. Calculatrice AUTORISÉE en mode examen.

D'après Bac S 2008

Soit a et b deux entiers naturels non nuls; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note $R_{a, b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod{3}$ et $y \equiv 1 \pmod{3}$, sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \pmod{3}$, sur le graphique 2 de la feuille annexe;
3. $x \equiv y \pmod{3}$, sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x; y)$ pour laquelle le point $M(x; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

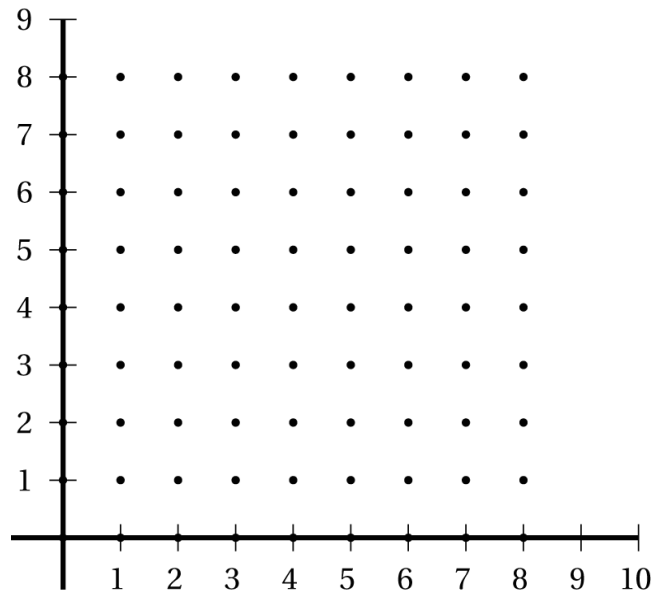
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a, b}$, avec $O(0; 0)$ et $A(a; b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

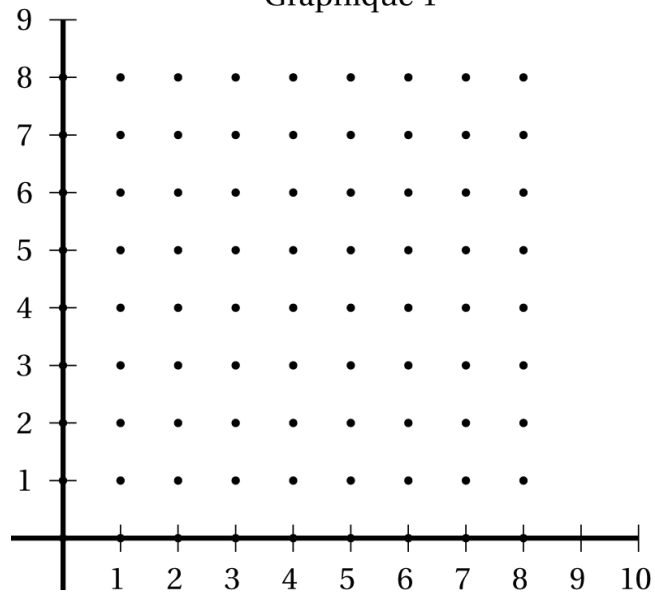
$$0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a, b}$.
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

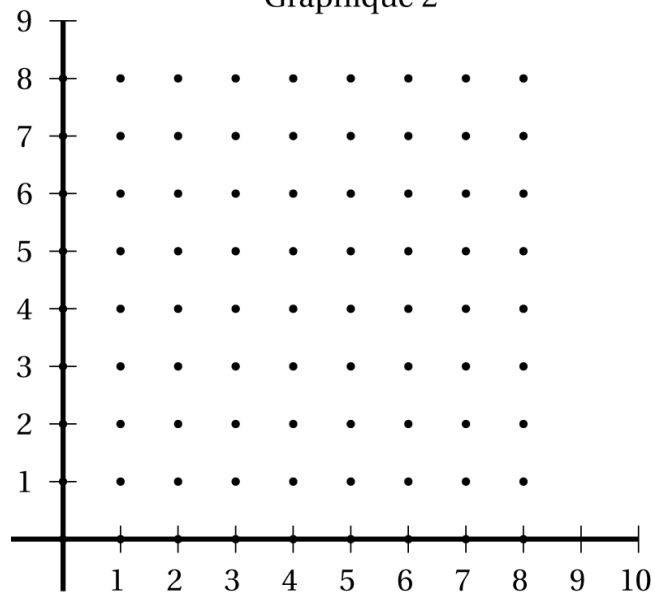
Annexe 1 - À rendre avec la copie



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3