TOME

ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

Cette fiche propose 100 exercices aléatoires (corrigés !)
de résolutions d’équations diophantiennes du type $ax+by=c$.

*   exercices rapides (pas de solutions)
** exercices avec des coefficients premiers entre eux
*** exercices avec des coefficients non premiers entre eux
Le symbole ♥ indique une équation diophantienne dont une solution particulière est évidente et ne nécessite donc pas de remonter un algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de Bézout.

**		Exercice n°1 :	résoudre l'équation diophantienne $242x + 193y = -118$.
***	♥	Exercice n°2 :	résoudre l'équation diophantienne $198x - 94y = 208$.
***		Exercice n°3 :	résoudre l'équation diophantienne $475x + 135y = 500$.
**	♥	Exercice n°4 :	résoudre l'équation diophantienne $-116x + 113y = 0$.
***		Exercice n°5 :	résoudre l'équation diophantienne $468x + 24y = 228$.
**		Exercice n°6 :	résoudre l'équation diophantienne $29x - 489y = -75$.
***		Exercice n°7 :	résoudre l'équation diophantienne $-462x + 388y = -60$.
***		Exercice n°8 :	résoudre l'équation diophantienne $-363x + 432y = 495$.
**		Exercice n°9 :	résoudre l'équation diophantienne $-435x + 469y = 127$.
*		Exercice n°10 :	résoudre l'équation diophantienne $-284x - 22y = 211$.
***		Exercice n°11 :	résoudre l'équation diophantienne $-128x - 256y = -512$.
*		Exercice n°12 :	résoudre l'équation diophantienne $385x + 462y = -40$.
**		Exercice n°13 :	résoudre l'équation diophantienne $-288x - 469y = -471$.
***	♥	Exercice n°14 :	résoudre l'équation diophantienne $172x - 458y = 230$.
*		Exercice n°15 :	résoudre l'équation diophantienne $228x + 291y = -187$.
***		Exercice n°16 :	résoudre l'équation diophantienne $-114x + 416y = 132$.
***		Exercice n°17 :	résoudre l'équation diophantienne $-105x - 430y = -150$.
*		Exercice n°18 :	résoudre l'équation diophantienne $-206x + 460y = 63$.
**		Exercice n°19 :	résoudre l'équation diophantienne $69x - 440y = -369$.
**	♥	Exercice n°20 :	résoudre l'équation diophantienne $6x + 115y = -321$.
**		Exercice n°21 :	résoudre l'équation diophantienne $-224x - 177y = 216$.
*		Exercice n°22 :	résoudre l'équation diophantienne $-216x - 258y = 236$.
*		Exercice n°23 :	résoudre l'équation diophantienne $-63x + 390y = -292$.
**	♥	Exercice n°24 :	résoudre l'équation diophantienne $7x + 90y = -332$.
*		Exercice n°25 :	résoudre l'équation diophantienne $-322x - 428y = -237$.
*		Exercice n°26 :	résoudre l'équation diophantienne $182x - 138y = 333$.
*		Exercice n°27 :	résoudre l'équation diophantienne $218x - 110y = -201$.
**		Exercice n°28 :	résoudre l'équation diophantienne $-288x + 31y = -323$.
**		Exercice n°29 :	résoudre l'équation diophantienne $-123x - 304y = 450$.
**		Exercice n°30 :	résoudre l'équation diophantienne $343x + 398y = -156$.
*		Exercice n°31 :	résoudre l'équation diophantienne $270x - 152y = 51$.
***		Exercice n°32 :	résoudre l'équation diophantienne $-56x + 340y = -408$.
***		Exercice n°33 :	résoudre l'équation diophantienne $436x - 158y = 452$.
***		Exercice n°34 :	résoudre l'équation diophantienne $-368x - 86y = 20$.
**		Exercice n°35 :	résoudre l'équation diophantienne $-43x - 402y = 92$.
*		Exercice n°36 :	résoudre l'équation diophantienne $464x - 308y = -146$.
***		Exercice n°37 :	résoudre l'équation diophantienne $-16x + 134y = 314$.
*		Exercice n°38 :	résoudre l'équation diophantienne $18x - 274y = -187$.
**		Exercice n°39 :	résoudre l'équation diophantienne $443x - 196y = 252$.
***		Exercice n°40 :	résoudre l'équation diophantienne $398x - 262y = -54$.
*		Exercice n°41 :	résoudre l'équation diophantienne $-438x - 9y = -388$.
*		Exercice n°42 :	résoudre l'équation diophantienne $285x + 135y = -20$.
**		Exercice n°43 :	résoudre l'équation diophantienne $491x + 420y = 85$.

*** Exercice n°44 : résoudre l'équation diophantienne -384x + 466y = -176.
*** Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne -114x - 195y = 336.
** Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne 123x - 95y = 161.
*** Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne 14x - 441y = -119.
*** ♥ Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne -298x + 88y = 298.
** Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne 319x + 443y = 341.
*** Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne -136x - 286y = -46.
*** Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne -486x + 465y = -156.
** Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne -92x + 267y = 154.
*** Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne 236x - 59y = -944.
** Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne -392x + 243y = 464.
** Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne -121x - 400y = 261.
*** Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne 348x + 140y = -144.
*** Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne -290x - 296y = 332.
* Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne 402x + 340y = 169.
*** ♥ Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne 98x - 130y = 132.
** ♥ Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne 383x + 450y = -67.
* Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne 363x - 93y = -68.
** Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne -131x + 180y = 79.
*** ♥ Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne 258x - 226y = 484.
*** Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne 330x - 142y = -100.
** Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne -193x - 286y = 467.
* Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne 415x + 130y = -372.
*** Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne 156x - 392y = -332.
* Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne -244x - 122y = -52.
*** ♥ Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne 116x - 60y = -8.
*** ♥ Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne 18x + 285y = 339.
* Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne -75x - 60y = 376.
** Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne 395x + 51y = 34.
** Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne 467x + 238y = 178.
** Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne -287x + 45y = -261.
*** ♥ Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne -358x - 202y = 468.
*** Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne 340x + 198y = 348.
* Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne 255x - 141y = -260.
*** Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne 80x - 466y = 354.
*** Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne -194x + 266y = 340.
*** Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne 328x + 154y = 282.
** Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne 421x - 228y = -187.
** ♥ Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne -292x - 273y = 38.
** Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne -268x + 253y = -372.
*** Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne 219x - 6y = 228.
*** Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne -12x - 130y = 8.
** Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne 281x + 211y = -214.
*** Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne 474x + 33y = -273.
** ♥ Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne 93x + 148y = -444.
*** Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne -310x + 458y = -198.
*** Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne 46x + 404y = 304.
*** Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne 42x - 346y = -248.
*** Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne -290x - 294y = 300.
** Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne 121x - 45y = -160.
** Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne -341x - 151y = -203.
** ♥ Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne -183x - 175y = 16.
*** ♥ Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne 192x - 456y = 456.
** Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne -72x - 187y = 381.
*** Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne -303x - 198y = -243.
*** Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne 352x + 464y = 304.
*** Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne 460x - 186y = 346.

Exercice n°1 : résoudre l'équation diophantienne $242x + 193y = -118$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 242 et 193 :

(1)	242	=	193	×	1	+	49
(2)	193	=	49	×	3	+	46
(3)	49	=	46	×	1	+	3
(4)	46	=	3	×	15	+	1
(5)	3	=	1	×	3	+	0

donc PGCD(242, 193) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	46	x	1	+	3	×	(-15)
(3)	1	=	46	x	1	+	(49-46x1)	×	(-15)
	1	=	49	x	(-15)	+	46	x	16
(2)	1	=	49	x	-15	+	(193-49x3)	×	16
	1	=	193	x	16	+	49	x	(-63)
(1)	1	=	193	x	16	+	(242-193x1)	×	(-63)
	1	=	242	x	(-63)	+	193	x	79

On a donc : $242 \times (-63) + 193 \times 79 = 1$
puis en multipliant par -118 : $242 \times 7434 + 193 \times (-9322) = -118$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $242x + 193y = -118$:
$242x + 193y = -118$ et $242 \times 7434 + 193 \times (-9322) = -118$
donc, par soustraction : $242(x - 7434) + 193(y + 9322) = 0$
donc $242(x - 7434) = 193(-9322 - y)$. (*)
Or, 242 et 193 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $242 \mid -9322 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-9322 - y = 242k$
et alors, d'après (*): $x - 7434 = 193k$.

• Réciproquement, si $x = 7434 + 193k$ et $y = -9322 - 242k$ alors :
$242x + 193y = 242(7434 + 193k) + 193(-9322 - 242k) = \dots$ (à faire) $= -118$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $242x + 193y = -118$ sont les couples
$(7434 + 193k, -9322 - 242k)$, où k entier relatif.

Exercice n°2 : résoudre l'équation diophantienne 198x - 94y = 208.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 198 et 94 :

(1)	198	=	94	×	2	+	10
(2)	94	=	10	×	9	+	4
(3)	10	=	4	×	2	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(198, 94) = 2.

En divisant par PGCD(198, 94) : 198x - 94y = 208 ⇔ 99x - 47y = 104.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (2, 2).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 99 et 47) et en multipliant par 104, on aurait trouvé la solution particulière (1976, 4160).

• Si x et y sont solutions de l'équation 99x - 47y = 104 :
99x - 47y = 104 et 99 × 2 - 47 × 2 = 104
donc, par soustraction : 99(x - 2) - 47(y - 2) = 0
donc 99(x - 2) = -47(2 - y). (*)
Or, 99 et -47 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 99 | 2 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 2 - y = 99k
et alors, d'après (*): x - 2 = -47k.

• Réciproquement, si x = 2 - 47k et y = 2 - 99k alors :
99x - 47y = 99(2 - 47k) - 47(2 - 99k) = ... (à faire) = 104.

• Conclusion : les solutions de l'équation 198x - 94y = 208 sont les couples (2 - 47k, 2 - 99k), où k entier relatif.

Exercice n°3 : résoudre l'équation diophantienne 475x + 135y = 500.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 475 et 135 :

(1)	475	=	135	×	3	+	70
(2)	135	=	70	×	1	+	65
(3)	70	=	65	×	1	+	5
(4)	65	=	5	×	13	+	0

donc PGCD(475, 135) = 5.

En divisant par PGCD(475, 135) : 475x + 135y = 500 ⇔ 95x + 27y = 100.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 95 et 27 :

(1)	95	=	27	×	3	+	14
(2)	27	=	14	×	1	+	13
(3)	14	=	13	×	1	+	1
(4)	13	=	1	×	13	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	14	x	1	+	13	×	(-1)
(2)	1	=	14	x	1	+	(27-14x1)	×	(-1)
	1	=	27	x	(-1)	+	14	x	2
(1)	1	=	27	x	-1	+	(95-27x3)	×	2
	1	=	95	x	2	+	27	x	(-7)

On a donc : 95 × 2 + 27 × (-7) = 1

puis en multipliant par 100 : 95 × 200 + 27 × (-700) = 100.

• Si x et y sont solutions de l'équation 95x + 27y = 100 :

95x + 27y = 100 et 95 × 200 + 27 × (-700) = 100

donc, par soustraction : 95(x - 200) + 27(y + 700) = 0

donc 95(x - 200) = 27(-700 - y). (*)

Or, 95 et 27 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 95 | -700 - y

donc il existe un entier relatif k tel que -700 - y = 95k

et alors, d'après (*): x - 200 = 27k.

• Réciproquement, si x = 200 + 27k et y = -700 - 95k alors :

95x + 27y = 95(200 + 27k) + 27(-700 - 95k) = ... (à faire) = 100.

• Conclusion : les solutions de l'équation 475x + 135y = 500 sont les couples (200 + 27k, -700 - 95k), où k entier relatif.

Exercice n°4 : résoudre l'équation diophantienne -116x + 113y = 0.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 116 et 113 :

(1)	116	=	113	×	1	+	3
(2)	113	=	3	×	37	+	2
(3)	3	=	2	×	1	+	1
(4)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(116, 113) = 1.

• Si x et y sont solutions de l'équation -116x + 113y = 0 :
alors -116x = -113y. (*)
Or, -116 et -113 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -116 | y
donc il existe un entier relatif k tel que y = -116k
et alors, d'après (*): x = -113k.

• Réciproquement, si x = -113k et y = -116k alors :
-116x + 113y = ... (à faire) = 0.

• Conclusion : les solutions de l'équation -116x + 113y = 0 sont les couples (-113k, -116k), où k entier relatif.

Exercice n°5 : résoudre l'équation diophantienne $468x + 24y = 228$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 468 et 24 :

(1) $468 = 24 \times 19 + 12$

(2) $24 = 12 \times 2 + 0$

donc $PGCD(468, 24) = 12$.

En divisant par $PGCD(468, 24)$: $468x + 24y = 228 \Leftrightarrow 39x + 2y = 19$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 39 et 2 :

(1) $39 = 2 \times 19 + 1$

(2) $2 = 1 \times 2 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 39 \times 1 + 2 \times (-19)$

Puis en multipliant par 19 : $39 \times 19 + 2 \times (-361) = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $39x + 2y = 19$:

$39x + 2y = 19$ et $39 \times 19 + 2 \times (-361) = 19$

donc, par soustraction : $39(x - 19) + 2(y + 361) = 0$

donc $39(x - 19) = 2(-361 - y)$. (*)

Or, 39 et 2 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $39 \mid -361 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-361 - y = 39k$

et alors, d'après (*): $x - 19 = 2k$.

• Réciproquement, si $x = 19 + 2k$ et $y = -361 - 39k$ alors :

$39x + 2y = 39(19 + 2k) + 2(-361 - 39k) = \ldots$ (à faire) $= 19$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $468x + 24y = 228$ sont les couples $(19 + 2k, -361 - 39k)$, où k entier relatif.

Exercice n°6 : résoudre l'équation diophantienne 29x - 489y = -75.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 489 et 29 :

(1)	489	=	29	×	16	+	25
(2)	29	=	25	×	1	+	4
(3)	25	=	4	×	6	+	1
(4)	4	=	1	×	4	+	0

donc PGCD(29, 489) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	25	x	1	+	4	×	(-6)
(2)	1	=	25	x	1	+	(29-25x1)	×	(-6)
	1	=	29	x	(-6)	+	25	x	7
(1)	1	=	29	x	-6	+	(489-29x16)	×	7
	1	=	489	x	7	+	29	x	(-118)

On a donc : 29 × (-118) + 489 × 7 = 1

puis en multipliant par -75 : 29 × 8850 - 489 × 525 = -75.

• Si x et y sont solutions de l'équation 29x - 489y = -75 :

29x - 489y = -75 et 29 × 8850 - 489 × 525 = -75

donc, par soustraction : 29(x - 8850) - 489(y - 525) = 0

donc 29(x - 8850) = -489(525 - y). (*)

Or, 29 et -489 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 29 | 525 - y

donc il existe un entier relatif k tel que 525 - y = 29k

et alors, d'après (*): x - 8850 = -489k.

• Réciproquement, si x = 8850 - 489k et y = 525 - 29k alors :

29x - 489y = 29(8850 - 489k) - 489(525 - 29k) = ... (à faire) = -75.

• Conclusion : les solutions de l'équation 29x - 489y = -75 sont les couples (8850 - 489k, 525 - 29k), où k entier relatif.

Exercice n°7 : résoudre l'équation diophantienne $-462x + 388y = -60$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 462 et 388 :

(1)	462	=	388	×	1	+	74
(2)	388	=	74	×	5	+	18
(3)	74	=	18	×	4	+	2
(4)	18	=	2	×	9	+	0

donc PGCD(462, 388) = 2.

En divisant par PGCD(462, 388) : $-462x + 388y = -60 \Leftrightarrow -231x + 194y = -30$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 231 et 194 :

(1)	231	=	194	×	1	+	37
(2)	194	=	37	×	5	+	9
(3)	37	=	9	×	4	+	1
(4)	9	=	1	×	9	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	37	x	1	+	9 × (-4)
(2)	1	=	37	x	1	+	(194-37x5) × (-4)
	1	=	194	x	(-4)	+	37 x 21
(1)	1	=	194	x	-4	+	(231-194x1) × 21
	1	=	231	x	21	+	194 x (-25)

On a donc : $231 \times 21 + 194 \times (-25) = 1$

puis en multipliant par -30 : $-231 \times 630 + 194 \times 750 = -30$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-231x + 194y = -30$:

$-231x + 194y = -30$ et $-231 \times 630 + 194 \times 750 = -30$

donc, par soustraction : $-231(x - 630) + 194(y - 750) = 0$

donc $-231(x - 630) = 194(750 - y)$. (*)

Or, -231 et 194 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-231 \mid 750 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $750 - y = -231k$

et alors, d'après (*): $x - 630 = 194k$.

• Réciproquement, si $x = 630 + 194k$ et $y = 750 + 231k$ alors :

$-231x + 194y = -231(630 + 194k) + 194(750 + 231k) = \ldots$ (à faire) $= -30$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-462x + 388y = -60$ sont les couples $(630 + 194k, 750 + 231k)$, où k entier relatif.

Exercice n°8 : résoudre l'équation diophantienne -363x + 432y = 495.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 432 et 363 :

(1)	432	=	363	×	1	+	69
(2)	363	=	69	×	5	+	18
(3)	69	=	18	×	3	+	15
(4)	18	=	15	×	1	+	3
(5)	15	=	3	×	5	+	0

donc PGCD(363, 432) = 3.
En divisant par PGCD(363, 432) : -363x + 432y = 495 ⇔ -121x + 144y = 165.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 121 et 144 :

(1)	144	=	121	×	1	+	23
(2)	121	=	23	×	5	+	6
(3)	23	=	6	×	3	+	5
(4)	6	=	5	×	1	+	1
(5)	5	=	1	×	5	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	6	x	1	+	5	×	(-1)
(3)	1	=	6	x	1	+	(23-6x3)	×	(-1)
	1	=	23	x	(-1)	+	6	x	4
(2)	1	=	23	x	-1	+	(121-23x5)	×	4
	1	=	121	x	4	+	23	x	(-21)
(1)	1	=	121	x	4	+	(144-121x1)	×	(-21)
	1	=	144	x	(-21)	+	121	x	25

On a donc : 121 × 25 + 144 × (-21) = 1
puis en multipliant par 165 : -121 × (-4125) + 144 × (-3465) = 165.

• Si x et y sont solutions de l'équation -121x + 144y = 165 :
-121x + 144y = 165 et -121 × (-4125) + 144 × (-3465) = 165
donc, par soustraction : -121(x + 4125) + 144(y + 3465) = 0
donc -121(x + 4125) = 144(-3465 - y). (*)
Or, -121 et 144 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -121 | -3465 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -3465 - y = -121k
et alors, d'après (*): x + 4125 = 144k.

• Réciproquement, si x = -4125 + 144k et y = -3465 + 121k alors :
-121x + 144y = -121(-4125 + 144k) + 144(-3465 + 121k) = ... (à faire) = 165.

• Conclusion : les solutions de l'équation -363x + 432y = 495 sont les couples (-4125 + 144k, -3465 + 121k), où k entier relatif.

Exercice n°9 : résoudre l'équation diophantienne -435x + 469y = 127.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 469 et 435 :

(1)	469	=	435	×	1	+	34
(2)	435	=	34	×	12	+	27
(3)	34	=	27	×	1	+	7
(4)	27	=	7	×	3	+	6
(5)	7	=	6	×	1	+	1
(6)	6	=	1	×	6	+	0

donc PGCD(435, 469) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	7	x	1	+	6	×	(-1)
(4)	1	=	7	x	1	+	(27-7x3)	×	(-1)
	1	=	27	x	(-1)	+	7	x	4
(3)	1	=	27	x	-1	+	(34-27x1)	×	4
	1	=	34	x	4	+	27	x	(-5)
(2)	1	=	34	x	4	+	(435-34x12)	×	(-5)
	1	=	435	x	(-5)	+	34	x	64
(1)	1	=	435	x	-5	+	(469-435x1)	×	64
	1	=	469	x	64	+	435	x	(-69)

On a donc : 435 × (-69) + 469 × 64 = 1
puis en multipliant par 127 : -435 × 8763 + 469 × 8128 = 127.

• Si x et y sont solutions de l'équation -435x + 469y = 127 :
-435x + 469y = 127 et -435 × 8763 + 469 × 8128 = 127
donc, par soustraction : -435(x - 8763) + 469(y - 8128) = 0
donc -435(x - 8763) = 469(8128 - y). (*)
Or, -435 et 469 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -435 | 8128 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 8128 - y = -435k
et alors, d'après (*): x - 8763 = 469k.

• Réciproquement, si x = 8763 + 469k et y = 8128 + 435k alors :
-435x + 469y = -435(8763 + 469k) + 469(8128 + 435k) = ... (à faire) = 127.

• Conclusion : les solutions de l'équation -435x + 469y = 127 sont les couples (8763 + 469k, 8128 + 435k), où k entier relatif.

Exercice n°10 : résoudre l'équation diophantienne -284x - 22y = 211.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 284 et 22 :

(1)	284	=	22	×	12	+	20
(2)	22	=	20	×	1	+	2
(3)	20	=	2	×	10	+	0

donc PGCD(284, 22) = 2.

• 211 = 2 × 105 + 1 donc 2 ne divise pas 211
donc l'équation diophantienne -284x - 22y = 211 n'admet pas de solutions.

Exercice n°11 : résoudre l'équation diophantienne -128x - 256y = -512.

CORRECTION

• 256 = 128 × 2
donc PGCD(128, 256) = 128.

En divisant par 128 : -128x - 256y = -512 ⇔ -x - 2y = -4.

• Conclusion : les solutions de l'équation -128x - 256y = -512 sont évidemment les couples (-2k + 4, k), où k entier relatif.

Exercice n°12 : résoudre l'équation diophantienne 385x + 462y = -40.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 462 et 385 :

(1)	462	=	385	×	1	+	77
(2)	385	=	77	×	5	+	0

donc PGCD(385, 462) = 77.

• 77 ne divise pas 40
donc l'équation diophantienne 385x + 462y = -40 n'admet pas de solutions.

Exercice n°13 : résoudre l'équation diophantienne -288x - 469y = -471.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 469 et 288 :

(1)	469	=	288	×	1	+	181
(2)	288	=	181	×	1	+	107
(3)	181	=	107	×	1	+	74
(4)	107	=	74	×	1	+	33
(5)	74	=	33	×	2	+	8
(6)	33	=	8	×	4	+	1
(7)	8	=	1	×	8	+	0

donc PGCD(288, 469) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	33	x	1	+	8 × (-4)
(5)	1	=	33	x	1	+	(74-33x2) × (-4)
	1	=	74	x	(-4)	+	33 x 9
(4)	1	=	74	x	-4	+	(107-74x1) × 9
	1	=	107	x	9	+	74 x (-13)
(3)	1	=	107	x	9	+	(181-107x1) × (-13)
	1	=	181	x	(-13)	+	107 x 22
(2)	1	=	181	x	-13	+	(288-181x1) × 22
	1	=	288	x	22	+	181 x (-35)
(1)	1	=	288	x	22	+	(469-288x1) × (-35)
	1	=	469	x	(-35)	+	288 x 57

On a donc : 288 × 57 + 469 × (-35) = 1
puis en multipliant par -471 : -288 × 26847 - 469 × (-16485) = -471.

• Si x et y sont solutions de l'équation -288x - 469y = -471 :
-288x - 469y = -471 et -288 × 26847 - 469 × (-16485) = -471
donc, par soustraction : -288(x - 26847) - 469(y + 16485) = 0
donc -288(x - 26847) = -469(-16485 - y). (*)
Or, -288 et -469 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -288 | -16485 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -16485 - y = -288k
et alors, d'après (*): x - 26847 = -469k.

• Réciproquement, si x = 26847 - 469k et y = -16485 + 288k alors :
-288x - 469y = -288(26847 - 469k) - 469(-16485 + 288k) = ... (à faire) = -471.

• Conclusion : les solutions de l'équation -288x - 469y = -471 sont les couples (26847 - 469k, -16485 + 288k), où k entier relatif.

Exercice n°14 : résoudre l'équation diophantienne $172x - 458y = 230$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 458 et 172 :

(1)	458	=	172	×	2	+	114
(2)	172	=	114	×	1	+	58
(3)	114	=	58	×	1	+	56
(4)	58	=	56	×	1	+	2
(5)	56	=	2	×	28	+	0

donc PGCD(172, 458) = 2.

En divisant par PGCD(172, 458) : $172x - 458y = 230 \Leftrightarrow 86x - 229y = 115$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (4, 1).

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 229 et 86) et en multipliant par 115, on aurait trouvé la solution particulière (920, 345).

• Si x et y sont solutions de l'équation $86x - 229y = 115$:

$86x - 229y = 115$ et $86 \times 4 - 229 \times 1 = 115$

donc, par soustraction : $86(x - 4) - 229(y - 1) = 0$

donc $86(x - 4) = -229(1 - y)$. (*)

Or, 86 et -229 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $86 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 86k$

et alors, d'après (*): $x - 4 = -229k$.

• Réciproquement, si $x = 4 - 229k$ et $y = 1 - 86k$ alors :

$86x - 229y = 86(4 - 229k) - 229(1 - 86k) = \ldots$ (à faire) $= 115$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $172x - 458y = 230$ sont les couples $(4 - 229k, 1 - 86k)$, où k entier relatif.

Exercice n°15 : résoudre l'équation diophantienne 228x + 291y = -187.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 291 et 228 :

(1)	291	=	228	×	1	+	63
(2)	228	=	63	×	3	+	39
(3)	63	=	39	×	1	+	24
(4)	39	=	24	×	1	+	15
(5)	24	=	15	×	1	+	9
(6)	15	=	9	×	1	+	6
(7)	9	=	6	×	1	+	3
(8)	6	=	3	×	2	+	0

donc PGCD(228, 291) = 3.

• 187 = 3 × 62 + 1 donc 3 ne divise pas 187
donc l'équation diophantienne 228x + 291y = -187 n'admet pas de solutions.

Exercice n°16 : résoudre l'équation diophantienne $-114x + 416y = 132$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 416 et 114 :

(1)	416	=	114	×	3	+	74
(2)	114	=	74	×	1	+	40
(3)	74	=	40	×	1	+	34
(4)	40	=	34	×	1	+	6
(5)	34	=	6	×	5	+	4
(6)	6	=	4	×	1	+	2
(7)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(114, 416) = 2.
En divisant par PGCD(114, 416) : $-114x + 416y = 132 \Leftrightarrow -57x + 208y = 66$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 57 et 208 :

(1)	208	=	57	×	3	+	37
(2)	57	=	37	×	1	+	20
(3)	37	=	20	×	1	+	17
(4)	20	=	17	×	1	+	3
(5)	17	=	3	×	5	+	2
(6)	3	=	2	×	1	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	3 x 1 + 2 × (-1)
(5)	1	=	3 x 1 + (17-3x5) × (-1)
	1	=	17 x (-1) + 3 x 6
(4)	1	=	17 x -1 + (20-17x1) × 6
	1	=	20 x 6 + 17 x (-7)
(3)	1	=	20 x 6 + (37-20x1) × (-7)
	1	=	37 x (-7) + 20 x 13
(2)	1	=	37 x -7 + (57-37x1) × 13
	1	=	57 x 13 + 37 x (-20)
(1)	1	=	57 x 13 + (208-57x3) × (-20)
	1	=	208 x (-20) + 57 x 73

On a donc : $57 \times 73 + 208 \times (-20) = 1$
puis en multipliant par 66 : $-57 \times (-4818) + 208 \times (-1320) = 66$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-57x + 208y = 66$:
$-57x + 208y = 66$ et $-57 \times (-4818) + 208 \times (-1320) = 66$
donc, par soustraction : $-57(x + 4818) + 208(y + 1320) = 0$
donc $-57(x + 4818) = 208(-1320 - y)$. (*)
Or, -57 et 208 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-57 \mid -1320 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-1320 - y = -57k$
et alors, d'après (*): $x + 4818 = 208k$.

• Réciproquement, si $x = -4818 + 208k$ et $y = -1320 + 57k$ alors :
$-57x + 208y = -57(-4818 + 208k) + 208(-1320 + 57k) = \dots$ (à faire) $= 66$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-114x + 416y = 132$ sont les couples $(-4818 + 208k, -1320 + 57k)$, où k entier relatif.

Exercice n°17 : résoudre l'équation diophantienne $-105x - 430y = -150$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 430 et 105 :

(1)	430	=	105	×	4	+	10
(2)	105	=	10	×	10	+	5
(3)	10	=	5	×	2	+	0

donc PGCD(105, 430) = 5.

En divisant par PGCD(105, 430) : $-105x - 430y = -150 \Leftrightarrow -21x - 86y = -30$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 21 et 86 :

(1)	86	=	21	×	4	+	2
(2)	21	=	2	×	10	+	1
(3)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 21 \times 1 + 2 \times (-10)$

(1) $1 = 21 \times 1 + (86-21\times4) \times (-10)$

$1 = 86 \times (-10) + 21 \times 41$

On a donc : $21 \times 41 + 86 \times (-10) = 1$

puis en multipliant par -30 : $-21 \times 1230 - 86 \times (-300) = -30$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-21x - 86y = -30$:

$-21x - 86y = -30$ et $-21 \times 1230 - 86 \times (-300) = -30$

donc, par soustraction : $-21(x - 1230) - 86(y + 300) = 0$

donc $-21(x - 1230) = -86(-300 - y)$. (*)

Or, -21 et -86 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-21 \mid -300 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-300 - y = -21k$

et alors, d'après (*): $x - 1230 = -86k$.

• Réciproquement, si $x = 1230 - 86k$ et $y = -300 + 21k$ alors :

$-21x - 86y = -21(1230 - 86k) - 86(-300 + 21k) = \ldots$ (à faire) $= -30$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-105x - 430y = -150$ sont les couples $(1230 - 86k, -300 + 21k)$, où k entier relatif.

Exercice n°18 : résoudre l'équation diophantienne -206x + 460y = 63.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 460 et 206 :

(1)	460	=	206	×	2	+	48
(2)	206	=	48	×	4	+	14
(3)	48	=	14	×	3	+	6
(4)	14	=	6	×	2	+	2
(5)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(206, 460) = 2.

• 63 = 2 × 31 + 1 donc 2 ne divise pas 63
donc l'équation diophantienne -206x + 460y = 63 n'admet pas de solutions.

Exercice n°19 : résoudre l'équation diophantienne 69x - 440y = -369.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 440 et 69 :

(1)	440	=	69	×	6	+	26
(2)	69	=	26	×	2	+	17
(3)	26	=	17	×	1	+	9
(4)	17	=	9	×	1	+	8
(5)	9	=	8	×	1	+	1
(6)	8	=	1	×	8	+	0

donc PGCD(69, 440) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	9	x	1	+	8	×	(-1)
(4)	1	=	9	x	1	+	(17-9x1)	×	(-1)
	1	=	17	x	(-1)	+	9	x	2
(3)	1	=	17	x	-1	+	(26-17x1)	×	2
	1	=	26	x	2	+	17	x	(-3)
(2)	1	=	26	x	2	+	(69-26x2)	×	(-3)
	1	=	69	x	(-3)	+	26	x	8
(1)	1	=	69	x	-3	+	(440-69x6)	×	8
	1	=	440	x	8	+	69	x	(-51)

On a donc : 69 × (-51) + 440 × 8 = 1
puis en multipliant par -369 : 69 × 18819 - 440 × 2952 = -369.

• Si x et y sont solutions de l'équation 69x - 440y = -369 :
69x - 440y = -369 et 69 × 18819 - 440 × 2952 = -369
donc, par soustraction : 69(x - 18819) - 440(y - 2952) = 0
donc 69(x - 18819) = -440(2952 - y). (*)
Or, 69 et -440 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 69 | 2952 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 2952 - y = 69k
et alors, d'après (*): x - 18819 = -440k.

• Réciproquement, si x = 18819 - 440k et y = 2952 - 69k alors :
69x - 440y = 69(18819 - 440k) - 440(2952 - 69k) = ... (à faire) = -369.

• Conclusion : les solutions de l'équation 69x - 440y = -369 sont les couples
(18819 - 440k, 2952 - 69k), où k entier relatif.

Exercice n°20 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 115y = -321$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 115 et 6 :

(1)	115	=	6	×	19	+	1
(2)	6	=	1	×	6	+	0

donc PGCD(6, 115) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (4, -3).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 115 et 6) et en multipliant par -321, on aurait trouvé la solution particulière (6099, -321).

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 115y = -321$:
$6x + 115y = -321$ et $6 \times 4 + 115 \times (-3) = -321$
donc, par soustraction : $6(x - 4) + 115(y + 3) = 0$
donc $6(x - 4) = 115(-3 - y)$. (*)
Or, 6 et 115 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid -3 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-3 - y = 6k$
et alors, d'après (*): $x - 4 = 115k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 115k$ et $y = -3 - 6k$ alors :
$6x + 115y = 6(4 + 115k) + 115(-3 - 6k) = ...$ (à faire) $= -321$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $6x + 115y = -321$ sont les couples $(4 + 115k, -3 - 6k)$, où k entier relatif.

Exercice n°21 : résoudre l'équation diophantienne -224x - 177y = 216.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 224 et 177 :

(1)	224	=	177	×	1	+	47
(2)	177	=	47	×	3	+	36
(3)	47	=	36	×	1	+	11
(4)	36	=	11	×	3	+	3
(5)	11	=	3	×	3	+	2
(6)	3	=	2	×	1	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(224, 177) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(5)	1	=	3	x	1	+	(11-3x3)	×	(-1)
	1	=	11	x	(-1)	+	3	x	4
(4)	1	=	11	x	-1	+	(36-11x3)	×	4
	1	=	36	x	4	+	11	x	(-13)
(3)	1	=	36	x	4	+	(47-36x1)	×	(-13)
	1	=	47	x	(-13)	+	36	x	17
(2)	1	=	47	x	-13	+	(177-47x3)	×	17
	1	=	177	x	17	+	47	x	(-64)
(1)	1	=	177	x	17	+	(224-177x1)	×	(-64)
	1	=	224	x	(-64)	+	177	x	81

On a donc : 224 × (-64) + 177 × 81 = 1
puis en multipliant par 216 : -224 × 13824 - 177 × (-17496) = 216.

• Si x et y sont solutions de l'équation -224x - 177y = 216 :
-224x - 177y = 216 et -224 × 13824 - 177 × (-17496) = 216
donc, par soustraction : -224(x - 13824) - 177(y + 17496) = 0
donc -224(x - 13824) = -177(-17496 - y). (*)
Or, -224 et -177 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -224 | -17496 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -17496 - y = -224k
et alors, d'après (*): x - 13824 = -177k.

• Réciproquement, si x = 13824 - 177k et y = -17496 + 224k alors :
-224x - 177y = -224(13824 - 177k) - 177(-17496 + 224k) = ... (à faire) = 216.

• Conclusion : les solutions de l'équation -224x - 177y = 216 sont les couples (13824 - 177k, -17496 + 224k), où k entier relatif.

Exercice n°22 : résoudre l'équation diophantienne $-216x - 258y = 236$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 258 et 216 :

(1)	258	=	216	×	1	+	42
(2)	216	=	42	×	5	+	6
(3)	42	=	6	×	7	+	0

donc PGCD(216, 258) = 6.

• $236 = 6 \times 39 + 2$ donc 6 ne divise pas 236
donc l'équation diophantienne $-216x - 258y = 236$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°23 : résoudre l'équation diophantienne -63x + 390y = -292.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 390 et 63 :

(1)	390	=	63	×	6	+	12
(2)	63	=	12	×	5	+	3
(3)	12	=	3	×	4	+	0

donc PGCD(63, 390) = 3.

• 292 = 3 × 97 + 1 donc 3 ne divise pas 292
donc l'équation diophantienne -63x + 390y = -292 n'admet pas de solutions.

Exercice n°24 : résoudre l'équation diophantienne $7x + 90y = -332$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 7 :

(1)	90	=	7	×	12	+	6
(2)	7	=	6	×	1	+	1
(3)	6	=	1	×	6	+	0

donc PGCD(7, 90) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (4, -4).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 90 et 7) et en multipliant par -332, on aurait trouvé la solution particulière (-4316, 332).

• Si x et y sont solutions de l'équation $7x + 90y = -332$:

$7x + 90y = -332$ et $7 \times 4 + 90 \times (-4) = -332$

donc, par soustraction : $7(x - 4) + 90(y + 4) = 0$

donc $7(x - 4) = 90(-4 - y)$. (*)

Or, 7 et 90 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $7 \mid -4 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-4 - y = 7k$

et alors, d'après (*): $x - 4 = 90k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 90k$ et $y = -4 - 7k$ alors :

$7x + 90y = 7(4 + 90k) + 90(-4 - 7k) =$ ... (à faire) $= -332$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $7x + 90y = -332$ sont les couples $(4 + 90k, -4 - 7k)$, où k entier relatif.

Exercice n°25 : résoudre l'équation diophantienne -322x - 428y = -237.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 428 et 322 :

(1)	428	=	322	×	1	+	106
(2)	322	=	106	×	3	+	4
(3)	106	=	4	×	26	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(322, 428) = 2.

• 237 = 2 × 118 + 1 donc 2 ne divise pas 237
donc l'équation diophantienne -322x - 428y = -237 n'admet pas de solutions.

Exercice n°26 : résoudre l'équation diophantienne $182x - 138y = 333$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 182 et 138 :

(1)	182	=	138	×	1	+	44
(2)	138	=	44	×	3	+	6
(3)	44	=	6	×	7	+	2
(4)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(182, 138) = 2.

• $333 = 2 \times 166 + 1$ donc 2 ne divise pas 333
donc l'équation diophantienne $182x - 138y = 333$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°27 : résoudre l'équation diophantienne 218x - 110y = -201.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 218 et 110 :

(1)	218	=	110	×	1	+	108
(2)	110	=	108	×	1	+	2
(3)	108	=	2	×	54	+	0

donc PGCD(218, 110) = 2.

• 201 = 2 × 100 + 1 donc 2 ne divise pas 201
donc l'équation diophantienne 218x - 110y = -201 n'admet pas de solutions.

Exercice n°28 : résoudre l'équation diophantienne -288x + 31y = -323.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 288 et 31 :

(1) $288 = 31 \times 9 + 9$
(2) $31 = 9 \times 3 + 4$
(3) $9 = 4 \times 2 + 1$
(4) $4 = 1 \times 4 + 0$

donc PGCD(288, 31) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3) $1 = 9 \times 1 + 4 \times (-2)$
(2) $1 = 9 \times 1 + (31-9\times3) \times (-2)$
$1 = 31 \times (-2) + 9 \times 7$
(1) $1 = 31 \times -2 + (288-31\times9) \times 7$
$1 = 288 \times 7 + 31 \times (-65)$

On a donc : $288 \times 7 + 31 \times (-65) = 1$
puis en multipliant par -323 : $-288 \times 2261 + 31 \times 20995 = -323$.

• Si x et y sont solutions de l'équation -288x + 31y = -323 :
$-288x + 31y = -323$ et $-288 \times 2261 + 31 \times 20995 = -323$
donc, par soustraction : $-288(x - 2261) + 31(y - 20995) = 0$
donc $-288(x - 2261) = 31(20995 - y)$. (*)
Or, -288 et 31 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-288 \mid 20995 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $20995 - y = -288k$
et alors, d'après (*): $x - 2261 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = 2261 + 31k$ et $y = 20995 + 288k$ alors :
$-288x + 31y = -288(2261 + 31k) + 31(20995 + 288k) = \dots$ (à faire) $= -323$.

• Conclusion : les solutions de l'équation -288x + 31y = -323 sont les couples (2261 + 31k, 20995 + 288k), où k entier relatif.

Exercice n°29 : résoudre l'équation diophantienne -123x - 304y = 450.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 304 et 123 :

(1)	304	=	123	×	2	+	58
(2)	123	=	58	×	2	+	7
(3)	58	=	7	×	8	+	2
(4)	7	=	2	×	3	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(123, 304) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	7	x	1	+	2 × (-3)
(3)	1	=	7	x	1	+	(58-7x8) × (-3)
	1	=	58	x	(-3)	+	7 x 25
(2)	1	=	58	x	-3	+	(123-58x2) × 25
	1	=	123	x	25	+	58 x (-53)
(1)	1	=	123	x	25	+	(304-123x2) × (-53)
	1	=	304	x	(-53)	+	123 x 131

On a donc : 123 × 131 + 304 × (-53) = 1
puis en multipliant par 450 : -123 × (-58950) - 304 × 23850 = 450.

• Si x et y sont solutions de l'équation -123x - 304y = 450 :
-123x - 304y = 450 et -123 × (-58950) - 304 × 23850 = 450
donc, par soustraction : -123(x + 58950) - 304(y - 23850) = 0
donc -123(x + 58950) = -304(23850 - y). (*)
Or, -123 et -304 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -123 | 23850 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 23850 - y = -123k
et alors, d'après (*): x + 58950 = -304k.

• Réciproquement, si x = -58950 - 304k et y = 23850 + 123k alors :
-123x - 304y = -123(-58950 - 304k) - 304(23850 + 123k) = ... (à faire) = 450.

• Conclusion : les solutions de l'équation -123x - 304y = 450 sont les couples (-58950 - 304k, 23850 + 123k), où k entier relatif.

Exercice n°30 :   résoudre l'équation diophantienne 343x + 398y = -156.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 398 et 343 :

(1)	398	=	343	×	1	+	55
(2)	343	=	55	×	6	+	13
(3)	55	=	13	×	4	+	3
(4)	13	=	3	×	4	+	1
(5)	3	=	1	×	3	+	0

donc PGCD(343, 398) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	13	x 1	+	3 × (-4)
(3)	1	=	13	x 1	+	(55-13x4) × (-4)
	1	=	55	x (-4)	+	13 x 17
(2)	1	=	55	x -4	+	(343-55x6) × 17
	1	=	343	x 17	+	55 x(-106)
(1)	1	=	343	x 17	+	(398-343x1) × (-106)
	1	=	398	x(-106)	+	343 x 123

On a donc : 343 × 123 + 398 × (-106) = 1
puis en multipliant par -156 : 343 × (-19188) + 398 × 16536 = -156.

• Si x et y sont solutions de l'équation 343x + 398y = -156 :
343x + 398y = -156 et 343 × (-19188) + 398 × 16536 = -156
donc, par soustraction : 343(x + 19188) + 398(y - 16536) = 0
donc 343(x + 19188) = 398(16536 - y).   (*)
Or, 343 et 398 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 343 | 16536 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 16536 - y = 343k
et alors, d'après (*): x + 19188 = 398k.

• Réciproquement, si x = -19188 + 398k et y = 16536 - 343k alors :
343x + 398y = 343(-19188 + 398k) + 398(16536 - 343k) = ... (à faire) = -156.

• Conclusion : les solutions de l'équation 343x + 398y = -156 sont les couples (-19188 + 398k, 16536 - 343k), où k entier relatif.

Exercice n°31 : résoudre l'équation diophantienne 270x - 152y = 51.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 270 et 152 :

(1)	270	=	152	×	1	+	118
(2)	152	=	118	×	1	+	34
(3)	118	=	34	×	3	+	16
(4)	34	=	16	×	2	+	2
(5)	16	=	2	×	8	+	0

donc PGCD(270, 152) = 2.

• 51 = 2 × 25 + 1 donc 2 ne divise pas 51
donc l'équation diophantienne 270x - 152y = 51 n'admet pas de solutions.

Exercice n°32 : résoudre l'équation diophantienne $-56x + 340y = -408$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 340 et 56 :

(1) $340 = 56 \times 6 + 4$

(2) $56 = 4 \times 14 + 0$

donc PGCD(56, 340) = 4.

En divisant par PGCD(56, 340) : $-56x + 340y = -408 \Leftrightarrow -14x + 85y = -102$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 14 et 85 :

(1) $85 = 14 \times 6 + 1$

(2) $14 = 1 \times 14 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 85 \times 1 + 14 \times (-6)$

On a donc : $14 \times (-6) + 85 \times 1 = 1$

puis en multipliant par -102 : $-14 \times (-612) + 85 \times (-102) = -102$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-14x + 85y = -102$:

$-14x + 85y = -102$ et $-14 \times (-612) + 85 \times (-102) = -102$

donc, par soustraction : $-14(x + 612) + 85(y + 102) = 0$

donc $-14(x + 612) = 85(-102 - y)$. (*)

Or, -14 et 85 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-14 \mid -102 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-102 - y = -14k$

et alors, d'après (*): $x + 612 = 85k$.

• Réciproquement, si $x = -612 + 85k$ et $y = -102 + 14k$ alors :

$-14x + 85y = -14(-612 + 85k) + 85(-102 + 14k) = \dots$ (à faire) $= -102$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-56x + 340y = -408$ sont les couples $(-612 + 85k, -102 + 14k)$, où k entier relatif.

Exercice n°33 : résoudre l'équation diophantienne 436x - 158y = 452.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 436 et 158 :

(1)	436	=	158	×	2	+	120
(2)	158	=	120	×	1	+	38
(3)	120	=	38	×	3	+	6
(4)	38	=	6	×	6	+	2
(5)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(436, 158) = 2.

En divisant par PGCD(436, 158) : 436x - 158y = 452 ⇔ 218x - 79y = 226.

• <u>Recherche d'une solution particulière</u>

Algorithme d'Euclide pour 218 et 79 :

(1)	218	=	79	×	2	+	60
(2)	79	=	60	×	1	+	19
(3)	60	=	19	×	3	+	3
(4)	19	=	3	×	6	+	1
(5)	3	=	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	19	x	1	+	3	×	(-6)
(3)	1	=	19	x	1	+	(60-19x3)	×	(-6)
	1	=	60	x	(-6)	+	19	x	19
(2)	1	=	60	x	-6	+	(79-60x1)	×	19
	1	=	79	x	19	+	60	x	(-25)
(1)	1	=	79	x	19	+	(218-79x2)	×	(-25)
	1	=	218	x	(-25)	+	79	x	69

On a donc : 218 × (-25) + 79 × 69 = 1

puis en multipliant par 226 : 218 × (-5650) - 79 × (-15594) = 226.

• <u>Si x et y sont solutions</u> de l'équation 218x - 79y = 226 :

218x - 79y = 226 et 218 × (-5650) - 79 × (-15594) = 226

donc, par soustraction : 218(x + 5650) - 79(y + 15594) = 0

donc 218(x + 5650) = -79(-15594 - y). (*)

Or, 218 et -79 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 218 | -15594 - y

donc il existe un entier relatif k tel que -15594 - y = 218k

et alors, d'après (*): x + 5650 = -79k.

• <u>Réciproquement</u>, si x = -5650 - 79k et y = -15594 - 218k alors :

218x - 79y = 218(-5650 - 79k) - 79(-15594 - 218k) = ... (à faire) = 226.

• <u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation 436x - 158y = 452 sont les couples (-5650 - 79k, -15594 - 218k), où k entier relatif.

Exercice n°34 : résoudre l'équation diophantienne -368x - 86y = 20.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 368 et 86 :

(1)	368	=	86	×	4	+	24
(2)	86	=	24	×	3	+	14
(3)	24	=	14	×	1	+	10
(4)	14	=	10	×	1	+	4
(5)	10	=	4	×	2	+	2
(6)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(368, 86) = 2.

En divisant par PGCD(368, 86) : -368x - 86y = 20 ⇔ -184x - 43y = 10.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 184 et 43 :

(1)	184	=	43	×	4	+	12
(2)	43	=	12	×	3	+	7
(3)	12	=	7	×	1	+	5
(4)	7	=	5	×	1	+	2
(5)	5	=	2	×	2	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	5	x	1	+	2	×	(-2)
(4)	1	=	5	x	1	+	(7-5x1)	×	(-2)
	1	=	7	x	(-2)	+	5	x	3
(3)	1	=	7	x	-2	+	(12-7x1)	×	3
	1	=	12	x	3	+	7	x	(-5)
(2)	1	=	12	x	3	+	(43-12x3)	×	(-5)
	1	=	43	x	(-5)	+	12	x	18
(1)	1	=	43	x	-5	+	(184-43x4)	×	18
	1	=	184	x	18	+	43	x	(-77)

On a donc : 184 × 18 + 43 × (-77) = 1
puis en multipliant par 10 : -184 × (-180) - 43 × 770 = 10.

• Si x et y sont solutions de l'équation -184x - 43y = 10 :
-184x - 43y = 10 et -184 × (-180) - 43 × 770 = 10
donc, par soustraction : -184(x + 180) - 43(y - 770) = 0
donc -184(x + 180) = -43(770 - y). (*)
Or, -184 et -43 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -184 | 770 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 770 - y = -184k
et alors, d'après (*): x + 180 = -43k.

• Réciproquement, si x = -180 - 43k et y = 770 + 184k alors :
-184x - 43y = -184(-180 - 43k) - 43(770 + 184k) = ... (à faire) = 10.

• Conclusion : les solutions de l'équation -368x - 86y = 20 sont les couples (-180 - 43k, 770 + 184k), où k entier relatif.

Exercice n°35 : résoudre l'équation diophantienne $-43x - 402y = 92$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 402 et 43 :

(1)	402	=	43	×	9	+	15
(2)	43	=	15	×	2	+	13
(3)	15	=	13	×	1	+	2
(4)	13	=	2	×	6	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(43, 402) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	13	x	1	+	2	×	(-6)
(3)	1	=	13	x	1	+	(15-13x1)	×	(-6)
	1	=	15	x	(-6)	+	13	x	7
(2)	1	=	15	x	-6	+	(43-15x2)	×	7
	1	=	43	x	7	+	15	x	(-20)
(1)	1	=	43	x	7	+	(402-43x9)	×	(-20)
	1	=	402	x	(-20)	+	43	x	187

On a donc : $43 \times 187 + 402 \times (-20) = 1$
puis en multipliant par 92 : $-43 \times (-17204) - 402 \times 1840 = 92$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-43x - 402y = 92$:
$-43x - 402y = 92$ et $-43 \times (-17204) - 402 \times 1840 = 92$
donc, par soustraction : $-43(x + 17204) - 402(y - 1840) = 0$
donc $-43(x + 17204) = -402(1840 - y)$. (*)
Or, -43 et -402 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-43 \mid 1840 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $1840 - y = -43k$
et alors, d'après (*): $x + 17204 = -402k$.

• Réciproquement, si $x = -17204 - 402k$ et $y = 1840 + 43k$ alors :
$-43x - 402y = -43(-17204 - 402k) - 402(1840 + 43k) = \ldots$ (à faire) $= 92$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-43x - 402y = 92$ sont les couples $(-17204 - 402k, 1840 + 43k)$, où k entier relatif.

Exercice n°36 : résoudre l'équation diophantienne 464x - 308y = -146.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 464 et 308 :

(1)	464	=	308	×	1	+	156
(2)	308	=	156	×	1	+	152
(3)	156	=	152	×	1	+	4
(4)	152	=	4	×	38	+	0

donc PGCD(464, 308) = 4.

• 146 = 4 × 36 + 2 donc 4 ne divise pas 146
donc l'équation diophantienne 464x - 308y = -146 n'admet pas de solutions.

Exercice n°37 : résoudre l'équation diophantienne $-16x + 134y = 314$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 134 et 16 :

(1)	134	=	16	×	8	+	6
(2)	16	=	6	×	2	+	4
(3)	6	=	4	×	1	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(16, 134) = 2.

En divisant par PGCD(16, 134) : $-16x + 134y = 314 \Leftrightarrow -8x + 67y = 157$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 8 et 67 :

(1)	67	=	8	×	8	+	3
(2)	8	=	3	×	2	+	2
(3)	3	=	2	×	1	+	1
(4)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(2)	1	=	3	x	1	+	(8-3x2)	×	(-1)
	1	=	8	x	(-1)	+	3	x	3
(1)	1	=	8	x	-1	+	(67-8x8)	×	3
	1	=	67	x	3	+	8	x	(-25)

On a donc : $8 \times (-25) + 67 \times 3 = 1$

puis en multipliant par 157 : $-8 \times 3925 + 67 \times 471 = 157$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-8x + 67y = 157$:

$-8x + 67y = 157$ et $-8 \times 3925 + 67 \times 471 = 157$

donc, par soustraction : $-8(x - 3925) + 67(y - 471) = 0$

donc $-8(x - 3925) = 67(471 - y)$. (*)

Or, -8 et 67 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-8 \mid 471 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $471 - y = -8k$

et alors, d'après (*): $x - 3925 = 67k$.

• Réciproquement, si $x = 3925 + 67k$ et $y = 471 + 8k$ alors :

$-8x + 67y = -8(3925 + 67k) + 67(471 + 8k) = \ldots$ (à faire) $= 157$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-16x + 134y = 314$ sont les couples $(3925 + 67k, 471 + 8k)$, où k entier relatif.

Exercice n°38 : résoudre l'équation diophantienne $18x - 274y = -187$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 274 et 18 :

(1)	274	=	18	×	15	+	4
(2)	18	=	4	×	4	+	2
(3)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(18, 274) = 2.

• $187 = 2 \times 93 + 1$ donc 2 ne divise pas 187
donc l'équation diophantienne $18x - 274y = -187$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°39 : résoudre l'équation diophantienne $443x - 196y = 252$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 443 et 196 :

(1)	443	=	196	×	2	+	51
(2)	196	=	51	×	3	+	43
(3)	51	=	43	×	1	+	8
(4)	43	=	8	×	5	+	3
(5)	8	=	3	×	2	+	2
(6)	3	=	2	×	1	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(443, 196) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(5)	1	=	3	x	1	+	(8-3x2)	×	(-1)
	1	=	8	x	(-1)	+	3	x	3
(4)	1	=	8	x	-1	+	(43-8x5)	×	3
	1	=	43	x	3	+	8	x	(-16)
(3)	1	=	43	x	3	+	(51-43x1)	×	(-16)
	1	=	51	x	(-16)	+	43	x	19
(2)	1	=	51	x	-16	+	(196-51x3)	×	19
	1	=	196	x	19	+	51	x	(-73)
(1)	1	=	196	x	19	+	(443-196x2)	×	(-73)
	1	=	443	x	(-73)	+	196	x	165

On a donc : $443 \times (-73) + 196 \times 165 = 1$

puis en multipliant par 252 : $443 \times (-18396) - 196 \times (-41580) = 252$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $443x - 196y = 252$:

$443x - 196y = 252$ et $443 \times (-18396) - 196 \times (-41580) = 252$

donc, par soustraction : $443(x + 18396) - 196(y + 41580) = 0$

donc $443(x + 18396) = -196(-41580 - y)$. (*)

Or, 443 et -196 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $443 \mid -41580 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-41580 - y = 443k$

et alors, d'après (*): $x + 18396 = -196k$.

• Réciproquement, si $x = -18396 - 196k$ et $y = -41580 - 443k$ alors :

$443x - 196y = 443(-18396 - 196k) - 196(-41580 - 443k) = \dots$ (à faire) $= 252$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $443x - 196y = 252$ sont les couples $(-18396 - 196k, -41580 - 443k)$, où k entier relatif.

Exercice n°40 : résoudre l'équation diophantienne $398x - 262y = -54$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 398 et 262 :

(1)	398	=	262	×	1	+	136
(2)	262	=	136	×	1	+	126
(3)	136	=	126	×	1	+	10
(4)	126	=	10	×	12	+	6
(5)	10	=	6	×	1	+	4
(6)	6	=	4	×	1	+	2
(7)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(398, 262) = 2.

En divisant par PGCD(398, 262) : $398x - 262y = -54 \Leftrightarrow 199x - 131y = -27$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 199 et 131 :

(1)	199	=	131	×	1	+	68
(2)	131	=	68	×	1	+	63
(3)	68	=	63	×	1	+	5
(4)	63	=	5	×	12	+	3
(5)	5	=	3	×	1	+	2
(6)	3	=	2	×	1	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	3	x	1	+	2 × (-1)
(5)	1	=	3	x	1	+	(5-3x1) × (-1)
	1	=	5	x	(-1)	+	3 x 2
(4)	1	=	5	x	-1	+	(63-5x12) × 2
	1	=	63	x	2	+	5 x (-25)
(3)	1	=	63	x	2	+	(68-63x1) × (-25)
	1	=	68	x	(-25)	+	63 x 27
(2)	1	=	68	x	-25	+	(131-68x1) × 27
	1	=	131	x	27	+	68 x (-52)
(1)	1	=	131	x	27	+	(199-131x1) × (-52)
	1	=	199	x	(-52)	+	131 x 79

On a donc : $199 \times (-52) + 131 \times 79 = 1$

puis en multipliant par -27 : $199 \times 1404 - 131 \times 2133 = -27$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $199x - 131y = -27$:

$199x - 131y = -27$ et $199 \times 1404 - 131 \times 2133 = -27$

donc, par soustraction : $199(x - 1404) - 131(y - 2133) = 0$

donc $199(x - 1404) = -131(2133 - y)$. (*)

Or, 199 et -131 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $199 \mid 2133 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $2133 - y = 199k$

et alors, d'après (*): $x - 1404 = -131k$.

• Réciproquement, si $x = 1404 - 131k$ et $y = 2133 - 199k$ alors :

$199x - 131y = 199(1404 - 131k) - 131(2133 - 199k) = \ldots$ (à faire) $= -27$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $398x - 262y = -54$ sont les couples $(1404 - 131k, 2133 - 199k)$, où k entier relatif.

Exercice n°41 : résoudre l'équation diophantienne -438x - 9y = -388.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 438 et 9 :

(1)	438	=	9	×	48	+	6
(2)	9	=	6	×	1	+	3
(3)	6	=	3	×	2	+	0

donc PGCD(438, 9) = 3.

• 388 = 3 × 129 + 1 donc 3 ne divise pas 388
donc l'équation diophantienne -438x - 9y = -388 n'admet pas de solutions.

Exercice n°42 : résoudre l'équation diophantienne 285x + 135y = -20.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 285 et 135 :

(1)	285	=	135	×	2	+	15
(2)	135	=	15	×	9	+	0

donc PGCD(285, 135) = 15.

• 20 = 15 × 1 + 5 donc 15 ne divise pas 20
donc l'équation diophantienne 285x + 135y = -20 n'admet pas de solutions.

Exercice n°43 : résoudre l'équation diophantienne 491x + 420y = 85.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 491 et 420 :

(1)	491	=	420	×	1	+	71
(2)	420	=	71	×	5	+	65
(3)	71	=	65	×	1	+	6
(4)	65	=	6	×	10	+	5
(5)	6	=	5	×	1	+	1
(6)	5	=	1	×	5	+	0

donc PGCD(491, 420) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	6	x	1	+	5	×	(-1)
(4)	1	=	6	x	1	+	(65-6x10)	×	(-1)
	1	=	65	x	(-1)	+	6	x	11
(3)	1	=	65	x	-1	+	(71-65x1)	×	11
	1	=	71	x	11	+	65	x	(-12)
(2)	1	=	71	x	11	+	(420-71x5)	×	(-12)
	1	=	420	x	(-12)	+	71	x	71
(1)	1	=	420	x	-12	+	(491-420x1)	×	71
	1	=	491	x	71	+	420	x	(-83)

On a donc : 491 × 71 + 420 × (-83) = 1
puis en multipliant par 85 : 491 × 6035 + 420 × (-7055) = 85.

• Si x et y sont solutions de l'équation 491x + 420y = 85 :
491x + 420y = 85 et 491 × 6035 + 420 × (-7055) = 85
donc, par soustraction : 491(x - 6035) + 420(y + 7055) = 0
donc 491(x - 6035) = 420(-7055 - y). (*)
Or, 491 et 420 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 491 | -7055 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -7055 - y = 491k
et alors, d'après (*): x - 6035 = 420k.

• Réciproquement, si x = 6035 + 420k et y = -7055 - 491k alors :
491x + 420y = 491(6035 + 420k) + 420(-7055 - 491k) = ... (à faire) = 85.

• Conclusion : les solutions de l'équation 491x + 420y = 85 sont les couples
(6035 + 420k, -7055 - 491k), où k entier relatif.

Exercice n°44 : résoudre l'équation diophantienne -384x + 466y = -176.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 466 et 384 :

(1)	466	=	384	×	1	+	82
(2)	384	=	82	×	4	+	56
(3)	82	=	56	×	1	+	26
(4)	56	=	26	×	2	+	4
(5)	26	=	4	×	6	+	2
(6)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(384, 466) = 2.

En divisant par PGCD(384, 466) : -384x + 466y = -176 ⇔ -192x + 233y = -88.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 192 et 233 :

(1)	233	=	192	×	1	+	41
(2)	192	=	41	×	4	+	28
(3)	41	=	28	×	1	+	13
(4)	28	=	13	×	2	+	2
(5)	13	=	2	×	6	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	13	x	1	+	2	×	(-6)
(4)	1	=	13	x	1	+	(28-13x2)	×	(-6)
	1	=	28	x	(-6)	+	13	x	13
(3)	1	=	28	x	-6	+	(41-28x1)	×	13
	1	=	41	x	13	+	28	x	(-19)
(2)	1	=	41	x	13	+	(192-41x4)	×	(-19)
	1	=	192	x	(-19)	+	41	x	89
(1)	1	=	192	x	-19	+	(233-192x1)	×	89
	1	=	233	x	89	+	192	x	(-108)

On a donc : 192 × (-108) + 233 × 89 = 1

puis en multipliant par -88 : -192 × (-9504) + 233 × (-7832) = -88.

• Si x et y sont solutions de l'équation -192x + 233y = -88 :

-192x + 233y = -88 et -192 × (-9504) + 233 × (-7832) = -88

donc, par soustraction : -192(x + 9504) + 233(y + 7832) = 0

donc -192(x + 9504) = 233(-7832 - y). (*)

Or, -192 et 233 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : -192 | -7832 - y

donc il existe un entier relatif k tel que -7832 - y = -192k

et alors, d'après (*): x + 9504 = 233k.

• Réciproquement, si x = -9504 + 233k et y = -7832 + 192k alors :

-192x + 233y = -192(-9504 + 233k) + 233(-7832 + 192k) = ... (à faire) = -88.

• Conclusion : les solutions de l'équation -384x + 466y = -176 sont les couples (-9504 + 233k, -7832 + 192k), où k entier relatif.

Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne -114x - 195y = 336.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 195 et 114 :

(1)	195	=	114	×	1	+	81
(2)	114	=	81	×	1	+	33
(3)	81	=	33	×	2	+	15
(4)	33	=	15	×	2	+	3
(5)	15	=	3	×	5	+	0

donc PGCD(114, 195) = 3.

En divisant par PGCD(114, 195) : -114x - 195y = 336 ⇔ -38x - 65y = 112.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 38 et 65 :

(1)	65	=	38	×	1	+	27
(2)	38	=	27	×	1	+	11
(3)	27	=	11	×	2	+	5
(4)	11	=	5	×	2	+	1
(5)	5	=	1	×	5	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	11	x	1	+	5	×	(-2)
(3)	1	=	11	x	1	+	(27-11x2)	×	(-2)
	1	=	27	x	(-2)	+	11	x	5
(2)	1	=	27	x	-2	+	(38-27x1)	×	5
	1	=	38	x	5	+	27	x	(-7)
(1)	1	=	38	x	5	+	(65-38x1)	×	(-7)
	1	=	65	x	(-7)	+	38	x	12

On a donc : 38 × 12 + 65 × (-7) = 1
puis en multipliant par 112 : -38 × (-1344) - 65 × 784 = 112.

• Si x et y sont solutions de l'équation -38x - 65y = 112 :
-38x - 65y = 112 et -38 × (-1344) - 65 × 784 = 112
donc, par soustraction : -38(x + 1344) - 65(y - 784) = 0
donc -38(x + 1344) = -65(784 - y). (*)
Or, -38 et -65 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -38 | 784 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 784 - y = -38k
et alors, d'après (*): x + 1344 = -65k.

• Réciproquement, si x = -1344 - 65k et y = 784 + 38k alors :
-38x - 65y = -38(-1344 - 65k) - 65(784 + 38k) = ... (à faire) = 112.

• Conclusion : les solutions de l'équation -114x - 195y = 336 sont les couples (-1344 - 65k, 784 + 38k), où k entier relatif.

Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne 123x - 95y = 161.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 123 et 95 :

(1)	123	=	95	×	1	+	28
(2)	95	=	28	×	3	+	11
(3)	28	=	11	×	2	+	6
(4)	11	=	6	×	1	+	5
(5)	6	=	5	×	1	+	1
(6)	5	=	1	×	5	+	0

donc PGCD(123, 95) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	6	x	1	+	5	×	(-1)
(4)	1	=	6	x	1	+	(11-6x1)	×	(-1)
	1	=	11	x	(-1)	+	6	x	2
(3)	1	=	11	x	-1	+	(28-11x2)	×	2
	1	=	28	x	2	+	11	x	(-5)
(2)	1	=	28	x	2	+	(95-28x3)	×	(-5)
	1	=	95	x	(-5)	+	28	x	17
(1)	1	=	95	x	-5	+	(123-95x1)	×	17
	1	=	123	x	17	+	95	x	(-22)

On a donc : 123 × 17 + 95 × (-22) = 1
puis en multipliant par 161 : 123 × 2737 - 95 × 3542 = 161.

• Si x et y sont solutions de l'équation 123x - 95y = 161 :
123x - 95y = 161 et 123 × 2737 - 95 × 3542 = 161
donc, par soustraction : 123(x - 2737) - 95(y - 3542) = 0
donc 123(x - 2737) = -95(3542 - y). (*)
Or, 123 et -95 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 123 | 3542 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 3542 - y = 123k
et alors, d'après (*): x - 2737 = -95k.

• Réciproquement, si x = 2737 - 95k et y = 3542 - 123k alors :
123x - 95y = 123(2737 - 95k) - 95(3542 - 123k) = ... (à faire) = 161.

• Conclusion : les solutions de l'équation 123x - 95y = 161 sont les couples (2737 - 95k, 3542 - 123k), où k entier relatif.

Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne $14x - 441y = -119$.

CORRECTION

- Algorithme d'Euclide pour 441 et 14 :

(1) $441 = 14 \times 31 + 7$
(2) $14 = 7 \times 2 + 0$

donc PGCD(14, 441) = 7.
En divisant par PGCD(14, 441) : $14x - 441y = -119 \Leftrightarrow 2x - 63y = -17$.

- Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 2 et 63 :

(1) $63 = 2 \times 31 + 1$
(2) $2 = 1 \times 2 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 63 \times 1 + 2 \times (-31)$

On a donc : $2 \times (-31) + 63 \times 1 = 1$
puis en multipliant par -17 : $2 \times 527 - 63 \times 17 = -17$.

- Si x et y sont solutions de l'équation $2x - 63y = -17$:

$2x - 63y = -17$ et $2 \times 527 - 63 \times 17 = -17$
donc, par soustraction : $2(x - 527) - 63(y - 17) = 0$
donc $2(x - 527) = -63(17 - y)$. (*)
Or, 2 et -63 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $2 \mid 17 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $17 - y = 2k$
et alors, d'après (*): $x - 527 = -63k$.

- Réciproquement, si $x = 527 - 63k$ et $y = 17 - 2k$ alors :

$2x - 63y = 2(527 - 63k) - 63(17 - 2k) = \ldots$ (à faire) $= -17$.

- Conclusion : les solutions de l'équation $14x - 441y = -119$ sont les couples $(527 - 63k, 17 - 2k)$, où k entier relatif.

Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne $-298x + 88y = 298$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 298 et 88 :

(1)	298	=	88	×	3	+	34
(2)	88	=	34	×	2	+	20
(3)	34	=	20	×	1	+	14
(4)	20	=	14	×	1	+	6
(5)	14	=	6	×	2	+	2
(6)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(298, 88) = 2.

En divisant par PGCD(298, 88) : $-298x + 88y = 298 \Leftrightarrow -149x + 44y = 149$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(-1, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 149 et 44) et en multipliant par 149, on aurait trouvé la solution particulière $(-1937, -6556)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-149x + 44y = 149$:

$-149x + 44y = 149$ et $-149 \times (-1) + 44 \times 0 = 149$

donc, par soustraction : $-149(x + 1) + 44y = 0$

donc $-149(x + 1) = -44y$. (*)

Or, -149 et 44 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-149 \mid -y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-y = -149k$

et alors, d'après (*): $x + 1 = 44k$.

• Réciproquement, si $x = -1 + 44k$ et $y = 149k$ alors :

$-149x + 44y = -149(-1 + 44k) + 44(149k) = \ldots$ (à faire) $= 149$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-298x + 88y = 298$ sont les couples $(-1 + 44k, 149k)$, où k entier relatif.

Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne 319x + 443y = 341.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 443 et 319 :

(1)	443	=	319	×	1	+	124
(2)	319	=	124	×	2	+	71
(3)	124	=	71	×	1	+	53
(4)	71	=	53	×	1	+	18
(5)	53	=	18	×	2	+	17
(6)	18	=	17	×	1	+	1
(7)	17	=	1	×	17	+	0

donc PGCD(319, 443) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	18	x	1	+	17	×	(-1)
(5)	1	=	18	x	1	+	(53-18x2)	×	(-1)
	1	=	53	x	(-1)	+	18	x	3
(4)	1	=	53	x	-1	+	(71-53x1)	×	3
	1	=	71	x	3	+	53	x	(-4)
(3)	1	=	71	x	3	+	(124-71x1)	×	(-4)
	1	=	124	x	(-4)	+	71	x	7
(2)	1	=	124	x	-4	+	(319-124x2)	×	7
	1	=	319	x	7	+	124	x	(-18)
(1)	1	=	319	x	7	+	(443-319x1)	×	(-18)
	1	=	443	x	(-18)	+	319	x	25

On a donc : 319 × 25 + 443 × (-18) = 1
puis en multipliant par 341 : 319 × 8525 + 443 × (-6138) = 341.

• Si x et y sont solutions de l'équation 319x + 443y = 341 :
319x + 443y = 341 et 319 × 8525 + 443 × (-6138) = 341
donc, par soustraction : 319(x - 8525) + 443(y + 6138) = 0
donc 319(x - 8525) = 443(-6138 - y). (*)
Or, 319 et 443 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 319 | -6138 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -6138 - y = 319k
et alors, d'après (*): x - 8525 = 443k.

• Réciproquement, si x = 8525 + 443k et y = -6138 - 319k alors :
319x + 443y = 319(8525 + 443k) + 443(-6138 - 319k) = ... (à faire) = 341.

• Conclusion : les solutions de l'équation 319x + 443y = 341 sont les couples (8525 + 443k, -6138 - 319k), où k entier relatif.

Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne $-136x - 286y = -46$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 286 et 136 :

(1)	286	=	136	×	2	+	14
(2)	136	=	14	×	9	+	10
(3)	14	=	10	×	1	+	4
(4)	10	=	4	×	2	+	2
(5)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(136, 286) = 2.

En divisant par PGCD(136, 286) : $-136x - 286y = -46 \Leftrightarrow -68x - 143y = -23$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 68 et 143 :

(1)	143	=	68	×	2	+	7
(2)	68	=	7	×	9	+	5
(3)	7	=	5	×	1	+	2
(4)	5	=	2	×	2	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	5	x	1	+	2	×	(-2)
(3)	1	=	5	x	1	+	(7-5x1)	×	(-2)
	1	=	7	x	(-2)	+	5	x	3
(2)	1	=	7	x	-2	+	(68-7x9)	×	3
	1	=	68	x	3	+	7	x	(-29)
(1)	1	=	68	x	3	+	(143-68x2)	×	(-29)
	1	=	143	x	(-29)	+	68	x	61

On a donc : $68 \times 61 + 143 \times (-29) = 1$

puis en multipliant par -23 : $-68 \times 1403 - 143 \times (-667) = -23$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-68x - 143y = -23$:

$-68x - 143y = -23$ et $-68 \times 1403 - 143 \times (-667) = -23$

donc, par soustraction : $-68(x - 1403) - 143(y + 667) = 0$

donc $-68(x - 1403) = -143(-667 - y)$. (*)

Or, -68 et -143 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-68 \mid -667 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-667 - y = -68k$

et alors, d'après (*): $x - 1403 = -143k$.

• Réciproquement, si $x = 1403 - 143k$ et $y = -667 + 68k$ alors :

$-68x - 143y = -68(1403 - 143k) - 143(-667 + 68k) = \ldots$ (à faire) $= -23$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-136x - 286y = -46$ sont les couples $(1403 - 143k, -667 + 68k)$, où k entier relatif.

Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne -486x + 465y = -156.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 486 et 465 :

(1)	486	=	465	×	1	+	21
(2)	465	=	21	×	22	+	3
(3)	21	=	3	×	7	+	0

donc PGCD(486, 465) = 3.
En divisant par PGCD(486, 465) : -486x + 465y = -156 ⇔ -162x + 155y = -52.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 162 et 155 :

(1)	162	=	155	×	1	+	7
(2)	155	=	7	×	22	+	1
(3)	7	=	1	×	7	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2)	1	=	155	x	1	+	7	×	(-22)
(1)	1	=	155	x	1	+	(162-155x1)	×	(-22)
	1	=	162	x	(-22)	+	155	x	23

On a donc : 162 × (-22) + 155 × 23 = 1
puis en multipliant par -52 : -162 × (-1144) + 155 × (-1196) = -52.

• Si x et y sont solutions de l'équation -162x + 155y = -52 :
-162x + 155y = -52 et -162 × (-1144) + 155 × (-1196) = -52
donc, par soustraction : -162(x + 1144) + 155(y + 1196) = 0
donc -162(x + 1144) = 155(-1196 - y). (*)
Or, -162 et 155 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -162 | -1196 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -1196 - y = -162k
et alors, d'après (*): x + 1144 = 155k.

• Réciproquement, si x = -1144 + 155k et y = -1196 + 162k alors :
-162x + 155y = -162(-1144 + 155k) + 155(-1196 + 162k) = ... (à faire) = -52.

• Conclusion : les solutions de l'équation -486x + 465y = -156 sont les couples (-1144 + 155k, -1196 + 162k), où k entier relatif.

Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne -92x + 267y = 154.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 267 et 92 :

(1)	267	=	92	×	2	+	83
(2)	92	=	83	×	1	+	9
(3)	83	=	9	×	9	+	2
(4)	9	=	2	×	4	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(92, 267) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	9	x	1	+	2	×	(-4)
(3)	1	=	9	x	1	+	(83-9x9)	×	(-4)
	1	=	83	x	(-4)	+	9	x	37
(2)	1	=	83	x	-4	+	(92-83x1)	×	37
	1	=	92	x	37	+	83	x	(-41)
(1)	1	=	92	x	37	+	(267-92x2)	×	(-41)
	1	=	267	x	(-41)	+	92	x	119

On a donc : 92 × 119 + 267 × (-41) = 1
puis en multipliant par 154 : -92 × (-18326) + 267 × (-6314) = 154.

• Si x et y sont solutions de l'équation -92x + 267y = 154 :
-92x + 267y = 154 et -92 × (-18326) + 267 × (-6314) = 154
donc, par soustraction : -92(x + 18326) + 267(y + 6314) = 0
donc -92(x + 18326) = 267(-6314 - y). (*)
Or, -92 et 267 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -92 | -6314 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -6314 - y = -92k
et alors, d'après (*): x + 18326 = 267k.

• Réciproquement, si x = -18326 + 267k et y = -6314 + 92k alors :
-92x + 267y = -92(-18326 + 267k) + 267(-6314 + 92k) = ... (à faire) = 154.

• Conclusion : les solutions de l'équation -92x + 267y = 154 sont les couples (-18326 + 267k, -6314 + 92k), où k entier relatif.

Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne $236x - 59y = -944$.

CORRECTION

• $236 = 59 \times 4$
donc PGCD(236, 59) = 59.

En divisant par 59 : $236x - 59y = -944 \Leftrightarrow 4x - y = -16$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $236x - 59y = -944$ sont évidemment les couples $(k, 4k + 16)$, où k entier relatif.

Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne -392x + 243y = 464.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 392 et 243 :

(1)	392	=	243	×	1	+	149
(2)	243	=	149	×	1	+	94
(3)	149	=	94	×	1	+	55
(4)	94	=	55	×	1	+	39
(5)	55	=	39	×	1	+	16
(6)	39	=	16	×	2	+	7
(7)	16	=	7	×	2	+	2
(8)	7	=	2	×	3	+	1
(9)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(392, 243) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(8)	1	=	7	x	1	+	2 × (-3)
(7)	1	=	7	x	1	+	(16-7x2) × (-3)
	1	=	16	x	(-3)	+	7 x 7
(6)	1	=	16	x	-3	+	(39-16x2) × 7
	1	=	39	x	7	+	16 x (-17)
(5)	1	=	39	x	7	+	(55-39x1) × (-17)
	1	=	55	x	(-17)	+	39 x 24
(4)	1	=	55	x	-17	+	(94-55x1) × 24
	1	=	94	x	24	+	55 x (-41)
(3)	1	=	94	x	24	+	(149-94x1) × (-41)
	1	=	149	x	(-41)	+	94 x 65
(2)	1	=	149	x	-41	+	(243-149x1) × 65
	1	=	243	x	65	+	149 x(-106)
(1)	1	=	243	x	65	+	(392-243x1) × (-106)
	1	=	392	x	(-106)	+	243 x 171

On a donc : 392 × (-106) + 243 × 171 = 1
puis en multipliant par 464 : -392 × 49184 + 243 × 79344 = 464.

• Si x et y sont solutions de l'équation -392x + 243y = 464 :
-392x + 243y = 464 et -392 × 49184 + 243 × 79344 = 464
donc, par soustraction : -392(x - 49184) + 243(y - 79344) = 0
donc -392(x - 49184) = 243(79344 - y). (*)
Or, -392 et 243 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -392 | 79344 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 79344 - y = -392k
et alors, d'après (*): x - 49184 = 243k.

• Réciproquement, si x = 49184 + 243k et y = 79344 + 392k alors :
-392x + 243y = -392(49184 + 243k) + 243(79344 + 392k) = ... (à faire) = 464.

• Conclusion : les solutions de l'équation -392x + 243y = 464 sont les couples
(49184 + 243k, 79344 + 392k), où k entier relatif.

Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne -121x - 400y = 261.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 400 et 121 :

(1)	400	=	121	×	3	+	37
(2)	121	=	37	×	3	+	10
(3)	37	=	10	×	3	+	7
(4)	10	=	7	×	1	+	3
(5)	7	=	3	×	2	+	1
(6)	3	=	1	×	3	+	0

donc PGCD(121, 400) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	7	x	1	+	3	×	(-2)
(4)	1	=	7	x	1	+	(10-7x1)	×	(-2)
	1	=	10	x	(-2)	+	7	x	3
(3)	1	=	10	x	-2	+	(37-10x3)	×	3
	1	=	37	x	3	+	10	x	(-11)
(2)	1	=	37	x	3	+	(121-37x3)	×	(-11)
	1	=	121	x	(-11)	+	37	x	36
(1)	1	=	121	x	-11	+	(400-121x3)	×	36
	1	=	400	x	36	+	121	x	(-119)

On a donc : 121 × (-119) + 400 × 36 = 1
puis en multipliant par 261 : -121 × 31059 - 400 × (-9396) = 261.

• Si x et y sont solutions de l'équation -121x - 400y = 261 :
-121x - 400y = 261 et -121 × 31059 - 400 × (-9396) = 261
donc, par soustraction : -121(x - 31059) - 400(y + 9396) = 0
donc -121(x - 31059) = -400(-9396 - y). (*)
Or, -121 et -400 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -121 | -9396 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -9396 - y = -121k
et alors, d'après (*): x - 31059 = -400k.

• Réciproquement, si x = 31059 - 400k et y = -9396 + 121k alors :
-121x - 400y = -121(31059 - 400k) - 400(-9396 + 121k) = ... (à faire) = 261.

• Conclusion : les solutions de l'équation -121x - 400y = 261 sont les couples (31059 - 400k, -9396 + 121k), où k entier relatif.

Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne 348x + 140y = -144.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 348 et 140 :

(1)	348	=	140	×	2	+	68
(2)	140	=	68	×	2	+	4
(3)	68	=	4	×	17	+	0

donc PGCD(348, 140) = 4.

En divisant par PGCD(348, 140) : 348x + 140y = -144 ⇔ 87x + 35y = -36.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 87 et 35 :

(1)	87	=	35	×	2	+	17
(2)	35	=	17	×	2	+	1
(3)	17	=	1	×	17	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2)	1	=	35	x	1	+	17	×	(-2)
(1)	1	=	35	x	1	+	(87-35x2)	×	(-2)
	1	=	87	x	(-2)	+	35	x	5

On a donc : 87 × (-2) + 35 × 5 = 1
puis en multipliant par -36 : 87 × 72 + 35 × (-180) = -36.

• Si x et y sont solutions de l'équation 87x + 35y = -36 :
87x + 35y = -36 et 87 × 72 + 35 × (-180) = -36
donc, par soustraction : 87(x - 72) + 35(y + 180) = 0
donc 87(x - 72) = 35(-180 - y). (*)
Or, 87 et 35 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 87 | -180 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -180 - y = 87k
et alors, d'après (*): x - 72 = 35k.

• Réciproquement, si x = 72 + 35k et y = -180 - 87k alors :
87x + 35y = 87(72 + 35k) + 35(-180 - 87k) = ... (à faire) = -36.

• Conclusion : les solutions de l'équation 348x + 140y = -144 sont les couples
(72 + 35k, -180 - 87k), où k entier relatif.

Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne $-290x - 296y = 332$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 296 et 290 :

(1)	296 =	290	×	1	+	6
(2)	290 =	6	×	48	+	2
(3)	6 =	2	×	3	+	0

donc PGCD(290, 296) = 2.

En divisant par PGCD(290, 296) : $-290x - 296y = 332 \Leftrightarrow -145x - 148y = 166$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 145 et 148 :

(1)	148 =	145	×	1	+	3
(2)	145 =	3	×	48	+	1
(3)	3 =	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 145 \times 1 + 3 \times (-48)$

(1) $1 = 145 \times 1 + (148-145\times1) \times (-48)$

$1 = 148 \times (-48) + 145 \times 49$

On a donc : $145 \times 49 + 148 \times (-48) = 1$

puis en multipliant par 166 : $-145 \times (-8134) - 148 \times 7968 = 166$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-145x - 148y = 166$:

$-145x - 148y = 166$ et $-145 \times (-8134) - 148 \times 7968 = 166$

donc, par soustraction : $-145(x + 8134) - 148(y - 7968) = 0$

donc $-145(x + 8134) = -148(7968 - y)$. (*)

Or, -145 et -148 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-145 \mid 7968 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $7968 - y = -145k$

et alors, d'après (*): $x + 8134 = -148k$.

• Réciproquement, si $x = -8134 - 148k$ et $y = 7968 + 145k$ alors :

$-145x - 148y = -145(-8134 - 148k) - 148(7968 + 145k) = \ldots$ (à faire) $= 166$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-290x - 296y = 332$ sont les couples $(-8134 - 148k, 7968 + 145k)$, où k entier relatif.

Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne $402x + 340y = 169$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 402 et 340 :

(1)	402	=	340	×	1	+	62
(2)	340	=	62	×	5	+	30
(3)	62	=	30	×	2	+	2
(4)	30	=	2	×	15	+	0

donc PGCD(402, 340) = 2.

• $169 = 2 \times 84 + 1$ donc 2 ne divise pas 169
donc l'équation diophantienne $402x + 340y = 169$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne 98x - 130y = 132.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 130 et 98 :

(1)	130	=	98	×	1	+	32
(2)	98	=	32	×	3	+	2
(3)	32	=	2	×	16	+	0

donc PGCD(98, 130) = 2.

En divisant par PGCD(98, 130) : 98x - 130y = 132 ⇔ 49x - 65y = 66.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (4, 2).

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 65 et 49) et en multipliant par 66, on aurait trouvé la solution particulière (264, 198).

• Si x et y sont solutions de l'équation 49x - 65y = 66 :

49x - 65y = 66 et 49 × 4 - 65 × 2 = 66

donc, par soustraction : 49(x - 4) - 65(y - 2) = 0

donc 49(x - 4) = -65(2 - y). (*)

Or, 49 et -65 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 49 | 2 - y

donc il existe un entier relatif k tel que 2 - y = 49k

et alors, d'après (*): x - 4 = -65k.

• Réciproquement, si x = 4 - 65k et y = 2 - 49k alors :

49x - 65y = 49(4 - 65k) - 65(2 - 49k) = ... (à faire) = 66.

• Conclusion : les solutions de l'équation 98x - 130y = 132 sont les couples (4 - 65k, 2 - 49k), où k entier relatif.

Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne $383x + 450y = -67$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 450 et 383 :

(1)	450	=	383	×	1	+	67
(2)	383	=	67	×	5	+	48
(3)	67	=	48	×	1	+	19
(4)	48	=	19	×	2	+	10
(5)	19	=	10	×	1	+	9
(6)	10	=	9	×	1	+	1
(7)	9	=	1	×	9	+	0

donc PGCD(383, 450) = 1.

• <u>Recherche d'une solution particulière</u>
Une solution particulière évidente est (1, -1).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 450 et 383) et en multipliant par -67, on aurait trouvé la solution particulière (-3149, 2680).

• <u>Si x et y sont solutions</u> de l'équation $383x + 450y = -67$:
$383x + 450y = -67$ et $383 \times 1 + 450 \times (-1) = -67$
donc, par soustraction : $383(x - 1) + 450(y + 1) = 0$
donc $383(x - 1) = 450(-1 - y)$. (*)
Or, 383 et 450 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $383 \mid -1 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-1 - y = 383k$
et alors, d'après (*): $x - 1 = 450k$.

• <u>Réciproquement</u>, si $x = 1 + 450k$ et $y = -1 - 383k$ alors :
$383x + 450y = 383(1 + 450k) + 450(-1 - 383k) = \ldots$ (à faire) $= -67$.

• <u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation $383x + 450y = -67$ sont les couples $(1 + 450k, -1 - 383k)$, où k entier relatif.

Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne 363x - 93y = -68.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 363 et 93 :

(1)	363	=	93	×	3	+	84
(2)	93	=	84	×	1	+	9
(3)	84	=	9	×	9	+	3
(4)	9	=	3	×	3	+	0

donc PGCD(363, 93) = 3.

• 68 = 3 × 22 + 2 donc 3 ne divise pas 68
donc l'équation diophantienne 363x - 93y = -68 n'admet pas de solutions.

Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne -131x + 180y = 79.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 180 et 131 :

(1)	180	=	131	×	1	+	49
(2)	131	=	49	×	2	+	33
(3)	49	=	33	×	1	+	16
(4)	33	=	16	×	2	+	1
(5)	16	=	1	×	16	+	0

donc PGCD(131, 180) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	33	x	1	+	16	×	(-2)
(3)	1	=	33	x	1	+	(49-33x1)	×	(-2)
	1	=	49	x	(-2)	+	33	x	3
(2)	1	=	49	x	-2	+	(131-49x2)	×	3
	1	=	131	x	3	+	49	x	(-8)
(1)	1	=	131	x	3	+	(180-131x1)	×	(-8)
	1	=	180	x	(-8)	+	131	x	11

On a donc : 131 × 11 + 180 × (-8) = 1
puis en multipliant par 79 : -131 × (-869) + 180 × (-632) = 79.

• Si x et y sont solutions de l'équation -131x + 180y = 79 :
-131x + 180y = 79 et -131 × (-869) + 180 × (-632) = 79
donc, par soustraction : -131(x + 869) + 180(y + 632) = 0
donc -131(x + 869) = 180(-632 - y). (*)
Or, -131 et 180 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -131 | -632 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -632 - y = -131k
et alors, d'après (*): x + 869 = 180k.

• Réciproquement, si x = -869 + 180k et y = -632 + 131k alors :
-131x + 180y = -131(-869 + 180k) + 180(-632 + 131k) = ... (à faire) = 79.

• Conclusion : les solutions de l'équation -131x + 180y = 79 sont les couples (-869 + 180k, -632 + 131k), où k entier relatif.

Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne 258x - 226y = 484.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 258 et 226 :

(1)	258	=	226	×	1	+	32
(2)	226	=	32	×	7	+	2
(3)	32	=	2	×	16	+	0

donc PGCD(258, 226) = 2.
En divisant par PGCD(258, 226) : 258x - 226y = 484 ⇔ 129x - 113y = 242.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (1, -1).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 129 et 113) et en multipliant par 242, on aurait trouvé la solution particulière (-1694, -1936).

• Si x et y sont solutions de l'équation 129x - 113y = 242 :
129x - 113y = 242 et 129 × 1 - 113 × (-1) = 242
donc, par soustraction : 129(x - 1) - 113(y + 1) = 0
donc 129(x - 1) = -113(-1 - y). (*)
Or, 129 et -113 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 129 | -1 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -1 - y = 129k
et alors, d'après (*): x - 1 = -113k.

• Réciproquement, si x = 1 - 113k et y = -1 - 129k alors :
129x - 113y = 129(1 - 113k) - 113(-1 - 129k) = ... (à faire) = 242.

• Conclusion : les solutions de l'équation 258x - 226y = 484 sont les couples (1 - 113k, -1 - 129k), où k entier relatif.

Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne 330x - 142y = -100.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 330 et 142 :

(1)	330	=	142	×	2	+	46
(2)	142	=	46	×	3	+	4
(3)	46	=	4	×	11	+	2
(4)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(330, 142) = 2.
En divisant par PGCD(330, 142) : 330x - 142y = -100 ⇔ 165x - 71y = -50.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 165 et 71 :

(1)	165	=	71	×	2	+	23
(2)	71	=	23	×	3	+	2
(3)	23	=	2	×	11	+	1
(4)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	23	x	1	+	2	x	(-11)
(2)	1	=	23	x	1	+	(71-23x3)	×	(-11)
	1	=	71	x	(-11)	+	23	x	34
(1)	1	=	71	x	-11	+	(165-71x2)	×	34
	1	=	165	x	34	+	71	x	(-79)

On a donc : 165 × 34 + 71 × (-79) = 1
puis en multipliant par -50 : 165 × (-1700) - 71 × (-3950) = -50.

• Si x et y sont solutions de l'équation 165x - 71y = -50 :
165x - 71y = -50 et 165 × (-1700) - 71 × (-3950) = -50
donc, par soustraction : 165(x + 1700) - 71(y + 3950) = 0
donc 165(x + 1700) = -71(-3950 - y). (*)
Or, 165 et -71 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 165 | -3950 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -3950 - y = 165k
et alors, d'après (*): x + 1700 = -71k.

• Réciproquement, si x = -1700 - 71k et y = -3950 - 165k alors :
165x - 71y = 165(-1700 - 71k) - 71(-3950 - 165k) = ... (à faire) = -50.

• Conclusion : les solutions de l'équation 330x - 142y = -100 sont les couples
(-1700 - 71k, -3950 - 165k), où k entier relatif.

Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne -193x - 286y = 467.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 286 et 193 :

(1)	286	=	193	×	1	+	93
(2)	193	=	93	×	2	+	7
(3)	93	=	7	×	13	+	2
(4)	7	=	2	×	3	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(193, 286) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	7	x	1	+	2	×	(-3)
(3)	1	=	7	x	1	+	(93-7x13)	×	(-3)
	1	=	93	x	(-3)	+	7	x	40
(2)	1	=	93	x	-3	+	(193-93x2)	×	40
	1	=	193	x	40	+	93	x	(-83)
(1)	1	=	193	x	40	+	(286-193x1)	×	(-83)
	1	=	286	x	(-83)	+	193	x	123

On a donc : 193 × 123 + 286 × (-83) = 1
puis en multipliant par 467 : -193 × (-57441) - 286 × 38761 = 467.

• Si x et y sont solutions de l'équation -193x - 286y = 467 :
-193x - 286y = 467 et -193 × (-57441) - 286 × 38761 = 467
donc, par soustraction : -193(x + 57441) - 286(y - 38761) = 0
donc -193(x + 57441) = -286(38761 - y). (*)
Or, -193 et -286 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -193 | 38761 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 38761 - y = -193k
et alors, d'après (*): x + 57441 = -286k.

• Réciproquement, si x = -57441 - 286k et y = 38761 + 193k alors :
-193x - 286y = -193(-57441 - 286k) - 286(38761 + 193k) = ... (à faire) = 467.

• Conclusion : les solutions de l'équation -193x - 286y = 467 sont les couples
(-57441 - 286k, 38761 + 193k), où k entier relatif.

Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne 415x + 130y = -372.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 415 et 130 :

(1)	415	=	130	×	3	+	25
(2)	130	=	25	×	5	+	5
(3)	25	=	5	×	5	+	0

donc PGCD(415, 130) = 5.

• 372 = 5 × 74 + 2 donc 5 ne divise pas 372
donc l'équation diophantienne 415x + 130y = -372 n'admet pas de solutions.

Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne 156x - 392y = -332.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 392 et 156 :

(1)	392	=	156	×	2	+	80
(2)	156	=	80	×	1	+	76
(3)	80	=	76	×	1	+	4
(4)	76	=	4	×	19	+	0

donc PGCD(156, 392) = 4.

En divisant par PGCD(156, 392) : 156x - 392y = -332 ⇔ 39x - 98y = -83.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 39 et 98 :

(1)	98	=	39	×	2	+	20
(2)	39	=	20	×	1	+	19
(3)	20	=	19	×	1	+	1
(4)	19	=	1	×	19	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	20	x	1	+	19	×	(-1)
(2)	1	=	20	x	1	+	(39-20x1)	×	(-1)
	1	=	39	x	(-1)	+	20	x	2
(1)	1	=	39	x	-1	+	(98-39x2)	×	2
	1	=	98	x	2	+	39	x	(-5)

On a donc : 39 × (-5) + 98 × 2 = 1

puis en multipliant par -83 : 39 × 415 - 98 × 166 = -83.

• Si x et y sont solutions de l'équation 39x - 98y = -83 :

39x - 98y = -83 et 39 × 415 - 98 × 166 = -83

donc, par soustraction : 39(x - 415) - 98(y - 166) = 0

donc 39(x - 415) = -98(166 - y). (*)

Or, 39 et -98 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 39 | 166 - y

donc il existe un entier relatif k tel que 166 - y = 39k

et alors, d'après (*): x - 415 = -98k.

• Réciproquement, si x = 415 - 98k et y = 166 - 39k alors :

39x - 98y = 39(415 - 98k) - 98(166 - 39k) = ... (à faire) = -83.

• Conclusion : les solutions de l'équation 156x - 392y = -332 sont les couples (415 - 98k, 166 - 39k), où k entier relatif.

Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne -244x - 122y = -52.

CORRECTION

• 244 = 122 × 2
donc PGCD(244, 122) = 122.

• 122 ne divise pas 52
donc l'équation diophantienne -244x - 122y = -52 n'admet pas de solutions.

Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne $116x - 60y = -8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 116 et 60 :

(1)	116	=	60	×	1	+	56
(2)	60	=	56	×	1	+	4
(3)	56	=	4	×	14	+	0

donc PGCD(116, 60) = 4.

En divisant par PGCD(116, 60) : $116x - 60y = -8 \Leftrightarrow 29x - 15y = -2$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (2, 4).

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 29 et 15) et en multipliant par -2, on aurait trouvé la solution particulière (2, 4).

• Si x et y sont solutions de l'équation $29x - 15y = -2$:

$29x - 15y = -2$ et $29 \times 2 - 15 \times 4 = -2$

donc, par soustraction : $29(x - 2) - 15(y - 4) = 0$

donc $29(x - 2) = -15(4 - y)$. (*)

Or, 29 et -15 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $29 \mid 4 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $4 - y = 29k$

et alors, d'après (*): $x - 2 = -15k$.

• Réciproquement, si $x = 2 - 15k$ et $y = 4 - 29k$ alors :

$29x - 15y = 29(2 - 15k) - 15(4 - 29k) = \ldots$ (à faire) $= -2$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $116x - 60y = -8$ sont les couples $(2 - 15k, 4 - 29k)$, où k entier relatif.

Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne $18x + 285y = 339$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 285 et 18 :

(1)	285	=	18	×	15	+	15
(2)	18	=	15	×	1	+	3
(3)	15	=	3	×	5	+	0

donc PGCD(18, 285) = 3.
En divisant par PGCD(18, 285) : $18x + 285y = 339 \Leftrightarrow 6x + 95y = 113$.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (3, 1).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 95 et 6) et en multipliant par 113, on aurait trouvé la solution particulière (1808, -113).

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 95y = 113$:
$6x + 95y = 113$ et $6 \times 3 + 95 \times 1 = 113$
donc, par soustraction : $6(x - 3) + 95(y - 1) = 0$
donc $6(x - 3) = 95(1 - y)$. (*)
Or, 6 et 95 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid 1 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $1 - y = 6k$
et alors, d'après (*): $x - 3 = 95k$.

• Réciproquement, si $x = 3 + 95k$ et $y = 1 - 6k$ alors :
$6x + 95y = 6(3 + 95k) + 95(1 - 6k) = \ldots$ (à faire) $= 113$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $18x + 285y = 339$ sont les couples $(3 + 95k, 1 - 6k)$, où k entier relatif.

Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne $-75x - 60y = 376$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 75 et 60 :

(1)	75	=	60	×	1	+	15
(2)	60	=	15	×	4	+	0

donc PGCD(75, 60) = 15.

• $376 = 15 \times 25 + 1$ donc 15 ne divise pas 376
donc l'équation diophantienne $-75x - 60y = 376$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne 395x + 51y = 34.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 395 et 51 :

(1)	395	=	51	×	7	+	38
(2)	51	=	38	×	1	+	13
(3)	38	=	13	×	2	+	12
(4)	13	=	12	×	1	+	1
(5)	12	=	1	×	12	+	0

donc PGCD(395, 51) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	13	x	1	+	12	×	(-1)
(3)	1	=	13	x	1	+	(38-13x2)	×	(-1)
	1	=	38	x	(-1)	+	13	x	3
(2)	1	=	38	x	-1	+	(51-38x1)	×	3
	1	=	51	x	3	+	38	x	(-4)
(1)	1	=	51	x	3	+	(395-51x7)	×	(-4)
	1	=	395	x	(-4)	+	51	x	31

On a donc : 395 × (-4) + 51 × 31 = 1
puis en multipliant par 34 : 395 × (-136) + 51 × 1054 = 34.

• Si x et y sont solutions de l'équation 395x + 51y = 34 :
395x + 51y = 34 et 395 × (-136) + 51 × 1054 = 34
donc, par soustraction : 395(x + 136) + 51(y - 1054) = 0
donc 395(x + 136) = 51(1054 - y). (*)
Or, 395 et 51 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 395 | 1054 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 1054 - y = 395k
et alors, d'après (*): x + 136 = 51k.

• Réciproquement, si x = -136 + 51k et y = 1054 - 395k alors :
395x + 51y = 395(-136 + 51k) + 51(1054 - 395k) = ... (à faire) = 34.

• Conclusion : les solutions de l'équation 395x + 51y = 34 sont les couples
(-136 + 51k, 1054 - 395k), où k entier relatif.

Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne $467x + 238y = 178$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 467 et 238 :

(1)	467	=	238	×	1	+	229
(2)	238	=	229	×	1	+	9
(3)	229	=	9	×	25	+	4
(4)	9	=	4	×	2	+	1
(5)	4	=	1	×	4	+	0

donc PGCD(467, 238) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1 =	9	x	1	+	4 × (-2)
(3)	1 =	9	x	1	+	(229-9x25) × (-2)
	1 =	229	x	(-2)	+	9 x 51
(2)	1 =	229	x	-2	+	(238-229x1) × 51
	1 =	238	x	51	+	229 x (-53)
(1)	1 =	238	x	51	+	(467-238x1) × (-53)
	1 =	467	x	(-53)	+	238 x 104

On a donc : $467 \times (-53) + 238 \times 104 = 1$
puis en multipliant par 178 : $467 \times (-9434) + 238 \times 18512 = 178$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $467x + 238y = 178$:
$467x + 238y = 178$ et $467 \times (-9434) + 238 \times 18512 = 178$
donc, par soustraction : $467(x + 9434) + 238(y - 18512) = 0$
donc $467(x + 9434) = 238(18512 - y)$. (*)
Or, 467 et 238 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $467 \mid 18512 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $18512 - y = 467k$
et alors, d'après (*): $x + 9434 = 238k$.

• Réciproquement, si $x = -9434 + 238k$ et $y = 18512 - 467k$ alors :
$467x + 238y = 467(-9434 + 238k) + 238(18512 - 467k) = ...$ (à faire) $= 178$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $467x + 238y = 178$ sont les couples $(-9434 + 238k, 18512 - 467k)$, où k entier relatif.

Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne -287x + 45y = -261.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 287 et 45 :

(1)	287	=	45	×	6	+	17
(2)	45	=	17	×	2	+	11
(3)	17	=	11	×	1	+	6
(4)	11	=	6	×	1	+	5
(5)	6	=	5	×	1	+	1
(6)	5	=	1	×	5	+	0

donc PGCD(287, 45) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	6	x 1	+	5	× (-1)
(4)	1	=	6	x 1	+	(11-6x1)	× (-1)
	1	=	11	x (-1)	+	6	x 2
(3)	1	=	11	x -1	+	(17-11x1)	× 2
	1	=	17	x 2	+	11	x (-3)
(2)	1	=	17	x 2	+	(45-17x2)	× (-3)
	1	=	45	x (-3)	+	17	x 8
(1)	1	=	45	x -3	+	(287-45x6)	× 8
	1	=	287	x 8	+	45	x (-51)

On a donc : 287 × 8 + 45 × (-51) = 1
puis en multipliant par -261 : -287 × 2088 + 45 × 13311 = -261.

• Si x et y sont solutions de l'équation -287x + 45y = -261 :
-287x + 45y = -261 et -287 × 2088 + 45 × 13311 = -261
donc, par soustraction : -287(x - 2088) + 45(y - 13311) = 0
donc -287(x - 2088) = 45(13311 - y). (*)
Or, -287 et 45 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -287 | 13311 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 13311 - y = -287k
et alors, d'après (*): x - 2088 = 45k.

• Réciproquement, si x = 2088 + 45k et y = 13311 + 287k alors :
-287x + 45y = -287(2088 + 45k) + 45(13311 + 287k) = ... (à faire) = -261.

• Conclusion : les solutions de l'équation -287x + 45y = -261 sont les couples (2088 + 45k, 13311 + 287k), où k entier relatif.

Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne -358x - 202y = 468.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 358 et 202 :

(1)	358	=	202	×	1	+	156
(2)	202	=	156	×	1	+	46
(3)	156	=	46	×	3	+	18
(4)	46	=	18	×	2	+	10
(5)	18	=	10	×	1	+	8
(6)	10	=	8	×	1	+	2
(7)	8	=	2	×	4	+	0

donc PGCD(358, 202) = 2.
En divisant par PGCD(358, 202) : -358x - 202y = 468 ⇔ -179x - 101y = 234.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (-3, 3).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 179 et 101) et en multipliant par 234, on aurait trouvé la solution particulière (5148, -9126).

• Si x et y sont solutions de l'équation -179x - 101y = 234 :
-179x - 101y = 234 et -179 × (-3) - 101 × 3 = 234
donc, par soustraction : -179(x + 3) - 101(y - 3) = 0
donc -179(x + 3) = -101(3 - y). (*)
Or, -179 et -101 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -179 | 3 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 3 - y = -179k
et alors, d'après (*): x + 3 = -101k.

• Réciproquement, si x = -3 - 101k et y = 3 + 179k alors :
-179x - 101y = -179(-3 - 101k) - 101(3 + 179k) = ... (à faire) = 234.

• Conclusion : les solutions de l'équation -358x - 202y = 468 sont les couples (-3 - 101k, 3 + 179k), où k entier relatif.

Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne $340x + 198y = 348$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 340 et 198 :

(1)	340	=	198	×	1	+	142
(2)	198	=	142	×	1	+	56
(3)	142	=	56	×	2	+	30
(4)	56	=	30	×	1	+	26
(5)	30	=	26	×	1	+	4
(6)	26	=	4	×	6	+	2
(7)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(340, 198) = 2.

En divisant par PGCD(340, 198) : $340x + 198y = 348 \Leftrightarrow 170x + 99y = 174$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 170 et 99 :

(1)	170	=	99	×	1	+	71
(2)	99	=	71	×	1	+	28
(3)	71	=	28	×	2	+	15
(4)	28	=	15	×	1	+	13
(5)	15	=	13	×	1	+	2
(6)	13	=	2	×	6	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	13	x	1	+	2	×	(-6)	
(5)	1	=	13	x	1	+	(15-13x1)	×	(-6)	
	1	=	15	x	(-6)	+	13	x	7	
(4)	1	=	15	x	-6	+	(28-15x1)	×	7	
	1	=	28	x	7	+	15	x	(-13)	
(3)	1	=	28	x	7	+	(71-28x2)	×	(-13)	
	1	=	71	x	(-13)	+	28	x	33	
(2)	1	=	71	x	-13	+	(99-71x1)	×	33	
	1	=	99	x	33	+	71	x	(-46)	
(1)	1	=	99	x	33	+	(170-99x1)	×	(-46)	
	1	=	170	x	(-46)	+	99	x	79	

On a donc : $170 \times (-46) + 99 \times 79 = 1$

puis en multipliant par 174 : $170 \times (-8004) + 99 \times 13746 = 174$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $170x + 99y = 174$:

$170x + 99y = 174$ et $170 \times (-8004) + 99 \times 13746 = 174$

donc, par soustraction : $170(x + 8004) + 99(y - 13746) = 0$

donc $170(x + 8004) = 99(13746 - y)$. (*)

Or, 170 et 99 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $170 \mid 13746 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $13746 - y = 170k$

et alors, d'après (*): $x + 8004 = 99k$.

• Réciproquement, si $x = -8004 + 99k$ et $y = 13746 - 170k$ alors :

$170x + 99y = 170(-8004 + 99k) + 99(13746 - 170k) = \ldots$ (à faire) $= 174$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $340x + 198y = 348$ sont les couples $(-8004 + 99k, 13746 - 170k)$, où k entier relatif.

Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne 255x - 141y = -260.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 255 et 141 :

(1)	255	=	141	×	1	+	114
(2)	141	=	114	×	1	+	27
(3)	114	=	27	×	4	+	6
(4)	27	=	6	×	4	+	3
(5)	6	=	3	×	2	+	0

donc PGCD(255, 141) = 3.

• 260 = 3 × 86 + 2 donc 3 ne divise pas 260
donc l'équation diophantienne 255x - 141y = -260 n'admet pas de solutions.

Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne $80x - 466y = 354$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 466 et 80 :

(1)	466	=	80	×	5	+	66
(2)	80	=	66	×	1	+	14
(3)	66	=	14	×	4	+	10
(4)	14	=	10	×	1	+	4
(5)	10	=	4	×	2	+	2
(6)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(80, 466) = 2.

En divisant par PGCD(80, 466) : $80x - 466y = 354 \Leftrightarrow 40x - 233y = 177$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 40 et 233 :

(1)	233	=	40	×	5	+	33
(2)	40	=	33	×	1	+	7
(3)	33	=	7	×	4	+	5
(4)	7	=	5	×	1	+	2
(5)	5	=	2	×	2	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	5	x	1	+	2	×	(-2)
(4)	1	=	5	x	1	+	(7-5x1)	×	(-2)
	1	=	7	x	(-2)	+	5	x	3
(3)	1	=	7	x	-2	+	(33-7x4)	×	3
	1	=	33	x	3	+	7	x	(-14)
(2)	1	=	33	x	3	+	(40-33x1)	×	(-14)
	1	=	40	x	(-14)	+	33	x	17
(1)	1	=	40	x	-14	+	(233-40x5)	×	17
	1	=	233	x	17	+	40	x	(-99)

On a donc : $40 \times (-99) + 233 \times 17 = 1$

puis en multipliant par 177 : $40 \times (-17523) - 233 \times (-3009) = 177$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $40x - 233y = 177$:

$40x - 233y = 177$ et $40 \times (-17523) - 233 \times (-3009) = 177$

donc, par soustraction : $40(x + 17523) - 233(y + 3009) = 0$

donc $40(x + 17523) = -233(-3009 - y)$. (*)

Or, 40 et -233 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $40 \mid -3009 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-3009 - y = 40k$

et alors, d'après (*): $x + 17523 = -233k$.

• Réciproquement, si $x = -17523 - 233k$ et $y = -3009 - 40k$ alors :

$40x - 233y = 40(-17523 - 233k) - 233(-3009 - 40k) = \ldots$ (à faire) $= 177$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $80x - 466y = 354$ sont les couples $(-17523 - 233k, -3009 - 40k)$, où k entier relatif.

Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne $-194x + 266y = 340$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 266 et 194 :

(1)	266	=	194	×	1	+	72
(2)	194	=	72	×	2	+	50
(3)	72	=	50	×	1	+	22
(4)	50	=	22	×	2	+	6
(5)	22	=	6	×	3	+	4
(6)	6	=	4	×	1	+	2
(7)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(194, 266) = 2.

En divisant par PGCD(194, 266) : $-194x + 266y = 340 \Leftrightarrow -97x + 133y = 170$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 97 et 133 :

(1)	133	=	97	×	1	+	36
(2)	97	=	36	×	2	+	25
(3)	36	=	25	×	1	+	11
(4)	25	=	11	×	2	+	3
(5)	11	=	3	×	3	+	2
(6)	3	=	2	×	1	+	1
(7)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(6)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(5)	1	=	3	x	1	+	(11-3x3)	×	(-1)
	1	=	11	x	(-1)	+	3	x	4
(4)	1	=	11	x	-1	+	(25-11x2)	×	4
	1	=	25	x	4	+	11	x	(-9)
(3)	1	=	25	x	4	+	(36-25x1)	×	(-9)
	1	=	36	x	(-9)	+	25	x	13
(2)	1	=	36	x	-9	+	(97-36x2)	×	13
	1	=	97	x	13	+	36	x	(-35)
(1)	1	=	97	x	13	+	(133-97x1)	×	(-35)
	1	=	133	x	(-35)	+	97	x	48

On a donc : $97 \times 48 + 133 \times (-35) = 1$
puis en multipliant par 170 : $-97 \times (-8160) + 133 \times (-5950) = 170$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-97x + 133y = 170$:
$-97x + 133y = 170$ et $-97 \times (-8160) + 133 \times (-5950) = 170$
donc, par soustraction : $-97(x + 8160) + 133(y + 5950) = 0$
donc $-97(x + 8160) = 133(-5950 - y)$. (*)
Or, -97 et 133 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-97 \mid -5950 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-5950 - y = -97k$
et alors, d'après (*): $x + 8160 = 133k$.

• Réciproquement, si $x = -8160 + 133k$ et $y = -5950 + 97k$ alors :
$-97x + 133y = -97(-8160 + 133k) + 133(-5950 + 97k) = \ldots$ (à faire) $= 170$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-194x + 266y = 340$ sont les couples $(-8160 + 133k, -5950 + 97k)$, où k entier relatif.

Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne 328x + 154y = 282.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 328 et 154 :

(1)	328	=	154	×	2	+	20
(2)	154	=	20	×	7	+	14
(3)	20	=	14	×	1	+	6
(4)	14	=	6	×	2	+	2
(5)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(328, 154) = 2.

En divisant par PGCD(328, 154) : 328x + 154y = 282 ⇔ 164x + 77y = 141.

• <u>Recherche d'une solution particulière</u>

Algorithme d'Euclide pour 164 et 77 :

(1)	164	=	77	×	2	+	10
(2)	77	=	10	×	7	+	7
(3)	10	=	7	×	1	+	3
(4)	7	=	3	×	2	+	1
(5)	3	=	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	7	x	1	+	3	×	(-2)
(3)	1	=	7	x	1	+	(10-7x1)	×	(-2)
	1	=	10	x	(-2)	+	7	x	3
(2)	1	=	10	x	-2	+	(77-10x7)	×	3
	1	=	77	x	3	+	10	x	(-23)
(1)	1	=	77	x	3	+	(164-77x2)	×	(-23)
	1	=	164	x	(-23)	+	77	x	49

On a donc : 164 × (-23) + 77 × 49 = 1

puis en multipliant par 141 : 164 × (-3243) + 77 × 6909 = 141.

• <u>Si x et y sont solutions</u> de l'équation 164x + 77y = 141 :

164x + 77y = 141 et 164 × (-3243) + 77 × 6909 = 141

donc, par soustraction : 164(x + 3243) + 77(y - 6909) = 0

donc 164(x + 3243) = 77(6909 - y). (*)

Or, 164 et 77 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 164 | 6909 - y

donc il existe un entier relatif k tel que 6909 - y = 164k

et alors, d'après (*): x + 3243 = 77k.

• <u>Réciproquement</u>, si x = -3243 + 77k et y = 6909 - 164k alors :

164x + 77y = 164(-3243 + 77k) + 77(6909 - 164k) = ... (à faire) = 141.

• <u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation 328x + 154y = 282 sont les couples (-3243 + 77k, 6909 - 164k), où k entier relatif.

Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne 421x - 228y = -187.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 421 et 228 :

(1)	421	=	228	×	1	+	193
(2)	228	=	193	×	1	+	35
(3)	193	=	35	×	5	+	18
(4)	35	=	18	×	1	+	17
(5)	18	=	17	×	1	+	1
(6)	17	=	1	×	17	+	0

donc PGCD(421, 228) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	18	x	1	+	17	×	(-1)
(4)	1	=	18	x	1	+	(35-18x1)	×	(-1)
	1	=	35	x	(-1)	+	18	x	2
(3)	1	=	35	x	-1	+	(193-35x5)	×	2
	1	=	193	x	2	+	35	x	(-11)
(2)	1	=	193	x	2	+	(228-193x1)	×	(-11)
	1	=	228	x	(-11)	+	193	x	13
(1)	1	=	228	x	-11	+	(421-228x1)	×	13
	1	=	421	x	13	+	228	x	(-24)

On a donc : 421 × 13 + 228 × (-24) = 1
puis en multipliant par -187 : 421 × (-2431) - 228 × (-4488) = -187.

• Si x et y sont solutions de l'équation 421x - 228y = -187 :
421x - 228y = -187 et 421 × (-2431) - 228 × (-4488) = -187
donc, par soustraction : 421(x + 2431) - 228(y + 4488) = 0
donc 421(x + 2431) = -228(-4488 - y). (*)
Or, 421 et -228 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 421 | -4488 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -4488 - y = 421k
et alors, d'après (*): x + 2431 = -228k.

• Réciproquement, si x = -2431 - 228k et y = -4488 - 421k alors :
421x - 228y = 421(-2431 - 228k) - 228(-4488 - 421k) = ... (à faire) = -187.

• Conclusion : les solutions de l'équation 421x - 228y = -187 sont les couples
(-2431 - 228k, -4488 - 421k), où k entier relatif.

Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne -292x - 273y = 38.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 292 et 273 :

(1)	292	=	273	×	1	+	19
(2)	273	=	19	×	14	+	7
(3)	19	=	7	×	2	+	5
(4)	7	=	5	×	1	+	2
(5)	5	=	2	×	2	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(292, 273) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (-2, 2).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 292 et 273) et en multipliant par 38, on aurait trouvé la solution particulière (-4370, 4674).

• Si x et y sont solutions de l'équation -292x - 273y = 38 :
-292x - 273y = 38 et -292 × (-2) - 273 × 2 = 38
donc, par soustraction : -292(x + 2) - 273(y - 2) = 0
donc -292(x + 2) = -273(2 - y). (*)
Or, -292 et -273 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -292 | 2 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 2 - y = -292k
et alors, d'après (*): x + 2 = -273k.

• Réciproquement, si x = -2 - 273k et y = 2 + 292k alors :
-292x - 273y = -292(-2 - 273k) - 273(2 + 292k) = ... (à faire) = 38.

• Conclusion : les solutions de l'équation -292x - 273y = 38 sont les couples (-2 - 273k, 2 + 292k), où k entier relatif.

Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne $-268x + 253y = -372$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 268 et 253 :

(1)	268	=	253	×	1	+	15
(2)	253	=	15	×	16	+	13
(3)	15	=	13	×	1	+	2
(4)	13	=	2	×	6	+	1
(5)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(268, 253) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4) $1 = 13 \times 1 + 2 \times (-6)$

(3) $1 = 13 \times 1 + (15-13\times1) \times (-6)$

$1 = 15 \times (-6) + 13 \times 7$

(2) $1 = 15 \times -6 + (253-15\times16) \times 7$

$1 = 253 \times 7 + 15 \times(-118)$

(1) $1 = 253 \times 7 + (268-253\times1) \times (-118)$

$1 = 268 \times(-118) + 253 \times 125$

On a donc : $268 \times (-118) + 253 \times 125 = 1$
puis en multipliant par -372 : $-268 \times (-43896) + 253 \times (-46500) = -372$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-268x + 253y = -372$:
$-268x + 253y = -372$ et $-268 \times (-43896) + 253 \times (-46500) = -372$
donc, par soustraction : $-268(x + 43896) + 253(y + 46500) = 0$
donc $-268(x + 43896) = 253(-46500 - y)$. (*)
Or, -268 et 253 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-268 \mid -46500 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-46500 - y = -268k$
et alors, d'après (*): $x + 43896 = 253k$.

• Réciproquement, si $x = -43896 + 253k$ et $y = -46500 + 268k$ alors :
$-268x + 253y = -268(-43896 + 253k) + 253(-46500 + 268k) = \dots$ (à faire) $= -372$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-268x + 253y = -372$ sont les couples $(-43896 + 253k, -46500 + 268k)$, où k entier relatif.

Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne 219x - 6y = 228.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 219 et 6 :

(1)	219	=	6	×	36	+	3
(2)	6	=	3	×	2	+	0

donc PGCD(219, 6) = 3.
En divisant par PGCD(219, 6) : 219x - 6y = 228 ⇔ 73x - 2y = 76.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 73 et 2 :

(1)	73	=	2	×	36	+	1
(2)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :
(1) 1 = 73 x 1 + 2 × (-36)

Puis en multipliant par 76 : 73 × 76 - 2 × 2736 = 76.

• Si x et y sont solutions de l'équation 73x - 2y = 76 :
73x - 2y = 76 et 73 × 76 - 2 × 2736 = 76
donc, par soustraction : 73(x - 76) - 2(y - 2736) = 0
donc 73(x - 76) = -2(2736 - y). (*)
Or, 73 et -2 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 73 | 2736 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 2736 - y = 73k
et alors, d'après (*): x - 76 = -2k.

• Réciproquement, si x = 76 - 2k et y = 2736 - 73k alors :
73x - 2y = 73(76 - 2k) - 2(2736 - 73k) = ... (à faire) = 76.

• Conclusion : les solutions de l'équation 219x - 6y = 228 sont les couples (76 - 2k, 2736 - 73k), où k entier relatif.

Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne $-12x - 130y = 8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 130 et 12 :

(1)	130	=	12	×	10	+	10
(2)	12	=	10	×	1	+	2
(3)	10	=	2	×	5	+	0

donc PGCD(12, 130) = 2.

En divisant par PGCD(12, 130) : $-12x - 130y = 8 \Leftrightarrow -6x - 65y = 4$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 6 et 65 :

(1)	65	=	6	×	10	+	5
(2)	6	=	5	×	1	+	1
(3)	5	=	1	×	5	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2)	1	=	6	x	1	+	5 × (-1)
(1)	1	=	6	x	1	+	(65-6x10) × (-1)
	1	=	65	x	(-1)	+	6 x 11

On a donc : $6 \times 11 + 65 \times (-1) = 1$

puis en multipliant par 4 : $-6 \times (-44) - 65 \times 4 = 4$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-6x - 65y = 4$:

$-6x - 65y = 4$ et $-6 \times (-44) - 65 \times 4 = 4$

donc, par soustraction : $-6(x + 44) - 65(y - 4) = 0$

donc $-6(x + 44) = -65(4 - y)$. (*)

Or, -6 et -65 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-6 \mid 4 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $4 - y = -6k$

et alors, d'après (*): $x + 44 = -65k$.

• Réciproquement, si $x = -44 - 65k$ et $y = 4 + 6k$ alors :

$-6x - 65y = -6(-44 - 65k) - 65(4 + 6k) = \ldots$ (à faire) $= 4$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-12x - 130y = 8$ sont les couples $(-44 - 65k, 4 + 6k)$, où k entier relatif.

Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne $281x + 211y = -214$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 281 et 211 :

(1) $281 = 211 \times 1 + 70$

(2) $211 = 70 \times 3 + 1$

(3) $70 = 1 \times 70 + 0$

donc PGCD(281, 211) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 211 \times 1 + 70 \times (-3)$

(1) $1 = 211 \times 1 + (281-211\times 1) \times (-3)$

$1 = 281 \times (-3) + 211 \times 4$

On a donc : $281 \times (-3) + 211 \times 4 = 1$

puis en multipliant par -214 : $281 \times 642 + 211 \times (-856) = -214$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $281x + 211y = -214$:

$281x + 211y = -214$ et $281 \times 642 + 211 \times (-856) = -214$

donc, par soustraction : $281(x - 642) + 211(y + 856) = 0$

donc $281(x - 642) = 211(-856 - y)$. (*)

Or, 281 et 211 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $281 \mid -856 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-856 - y = 281k$

et alors, d'après (*): $x - 642 = 211k$.

• Réciproquement, si $x = 642 + 211k$ et $y = -856 - 281k$ alors :

$281x + 211y = 281(642 + 211k) + 211(-856 - 281k) = ...$ (à faire) $= -214$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $281x + 211y = -214$ sont les couples $(642 + 211k, -856 - 281k)$, où k entier relatif.

Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne $474x + 33y = -273$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 474 et 33 :

(1)	474	=	33	×	14	+	12
(2)	33	=	12	×	2	+	9
(3)	12	=	9	×	1	+	3
(4)	9	=	3	×	3	+	0

donc PGCD(474, 33) = 3.

En divisant par PGCD(474, 33) : $474x + 33y = -273 \Leftrightarrow 158x + 11y = -91$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 158 et 11 :

(1)	158	=	11	×	14	+	4
(2)	11	=	4	×	2	+	3
(3)	4	=	3	×	1	+	1
(4)	3	=	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(3)	1	=	4 x 1	+	3 × (-1)
(2)	1	=	4 x 1	+	(11-4x2) × (-1)
	1	=	11 x (-1)	+	4 x 3
(1)	1	=	11 x -1	+	(158-11x14) × 3
	1	=	158 x 3	+	11 x (-43)

On a donc : $158 \times 3 + 11 \times (-43) = 1$

puis en multipliant par -91 : $158 \times (-273) + 11 \times 3913 = -91$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $158x + 11y = -91$:

$158x + 11y = -91$ et $158 \times (-273) + 11 \times 3913 = -91$

donc, par soustraction : $158(x + 273) + 11(y - 3913) = 0$

donc $158(x + 273) = 11(3913 - y)$. (*)

Or, 158 et 11 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $158 \mid 3913 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $3913 - y = 158k$

et alors, d'après (*): $x + 273 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = -273 + 11k$ et $y = 3913 - 158k$ alors :

$158x + 11y = 158(-273 + 11k) + 11(3913 - 158k) = ...$ (à faire) $= -91$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $474x + 33y = -273$ sont les couples $(-273 + 11k, 3913 - 158k)$, où k entier relatif.

Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 148y = -444$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 148 et 93 :

(1)	148	=	93	×	1	+	55
(2)	93	=	55	×	1	+	38
(3)	55	=	38	×	1	+	17
(4)	38	=	17	×	2	+	4
(5)	17	=	4	×	4	+	1
(6)	4	=	1	×	4	+	0

donc PGCD(93, 148) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (0, -3).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 148 et 93) et en multipliant par -444, on aurait trouvé la solution particulière (15540, -9768).

• Si x et y sont solutions de l'équation $93x + 148y = -444$:
$93x + 148y = -444$ et $148 \times (-3) = -444$
donc, par soustraction : $93x + 148(y + 3) = 0$
donc $93x = 148(-3 - y)$. (*)
Or, 93 et 148 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $93 \mid -3 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-3 - y = 93k$
et alors, d'après (*): $x = 148k$.

• Réciproquement, si $x = 148k$ et $y = -3 - 93k$ alors :
$93x + 148y = 93(-148k) + 148(-3 - 93k) = ...$ (à faire) $= -444$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $93x + 148y = -444$ sont les couples $(148k, -3 - 93k)$, où k entier relatif.

Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne $-310x + 458y = -198$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 458 et 310 :

(1)	458	=	310	×	1	+	148
(2)	310	=	148	×	2	+	14
(3)	148	=	14	×	10	+	8
(4)	14	=	8	×	1	+	6
(5)	8	=	6	×	1	+	2
(6)	6	=	2	×	3	+	0

donc PGCD(310, 458) = 2.

En divisant par PGCD(310, 458) : $-310x + 458y = -198 \Leftrightarrow -155x + 229y = -99$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 155 et 229 :

(1)	229	=	155	×	1	+	74
(2)	155	=	74	×	2	+	7
(3)	74	=	7	×	10	+	4
(4)	7	=	4	×	1	+	3
(5)	4	=	3	×	1	+	1
(6)	3	=	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	4	x	1	+	3	×	(-1)
(4)	1	=	4	x	1	+	(7-4x1)	×	(-1)
	1	=	7	x	(-1)	+	4	x	2
(3)	1	=	7	x	-1	+	(74-7x10)	×	2
	1	=	74	x	2	+	7	x	(-21)
(2)	1	=	74	x	2	+	(155-74x2)	×	(-21)
	1	=	155	x	(-21)	+	74	x	44
(1)	1	=	155	x	-21	+	(229-155x1)	×	44
	1	=	229	x	44	+	155	x	(-65)

On a donc : $155 \times (-65) + 229 \times 44 = 1$

puis en multipliant par -99 : $-155 \times (-6435) + 229 \times (-4356) = -99$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-155x + 229y = -99$:

$-155x + 229y = -99$ et $-155 \times (-6435) + 229 \times (-4356) = -99$

donc, par soustraction : $-155(x + 6435) + 229(y + 4356) = 0$

donc $-155(x + 6435) = 229(-4356 - y)$. (*)

Or, -155 et 229 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-155 \mid -4356 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-4356 - y = -155k$

et alors, d'après (*): $x + 6435 = 229k$.

• Réciproquement, si $x = -6435 + 229k$ et $y = -4356 + 155k$ alors :

$-155x + 229y = -155(-6435 + 229k) + 229(-4356 + 155k) = ...$ (à faire) $= -99$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-310x + 458y = -198$ sont les couples $(-6435 + 229k, -4356 + 155k)$, où k entier relatif.

Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne $46x + 404y = 304$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 404 et 46 :

(1)	404	=	46	×	8	+	36
(2)	46	=	36	×	1	+	10
(3)	36	=	10	×	3	+	6
(4)	10	=	6	×	1	+	4
(5)	6	=	4	×	1	+	2
(6)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(46, 404) = 2.

En divisant par PGCD(46, 404) : $46x + 404y = 304 \Leftrightarrow 23x + 202y = 152$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 23 et 202 :

(1)	202	=	23	×	8	+	18
(2)	23	=	18	×	1	+	5
(3)	18	=	5	×	3	+	3
(4)	5	=	3	×	1	+	2
(5)	3	=	2	×	1	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(4)	1	=	3	x	1	+	(5-3x1)	×	(-1)
	1	=	5	x	(-1)	+	3	x	2
(3)	1	=	5	x	-1	+	(18-5x3)	×	2
	1	=	18	x	2	+	5	x	(-7)
(2)	1	=	18	x	2	+	(23-18x1)	×	(-7)
	1	=	23	x	(-7)	+	18	x	9
(1)	1	=	23	x	-7	+	(202-23x8)	×	9
	1	=	202	x	9	+	23	x	(-79)

On a donc : $23 \times (-79) + 202 \times 9 = 1$

puis en multipliant par 152 : $23 \times (-12008) + 202 \times 1368 = 152$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $23x + 202y = 152$:

$23x + 202y = 152$ et $23 \times (-12008) + 202 \times 1368 = 152$

donc, par soustraction : $23(x + 12008) + 202(y - 1368) = 0$

donc $23(x + 12008) = 202(1368 - y)$. (*)

Or, 23 et 202 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $23 \mid 1368 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1368 - y = 23k$

et alors, d'après (*): $x + 12008 = 202k$.

• Réciproquement, si $x = -12008 + 202k$ et $y = 1368 - 23k$ alors :

$23x + 202y = 23(-12008 + 202k) + 202(1368 - 23k) = \ldots$ (à faire) $= 152$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $46x + 404y = 304$ sont les couples $(-12008 + 202k, 1368 - 23k)$, où k entier relatif.

Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne $42x - 346y = -248$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 346 et 42 :

(1) $346 = 42 \times 8 + 10$
(2) $42 = 10 \times 4 + 2$
(3) $10 = 2 \times 5 + 0$

donc PGCD(42, 346) = 2.

En divisant par PGCD(42, 346) : $42x - 346y = -248 \Leftrightarrow 21x - 173y = -124$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 21 et 173 :

(1) $173 = 21 \times 8 + 5$
(2) $21 = 5 \times 4 + 1$
(3) $5 = 1 \times 5 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 21 \times 1 + 5 \times (-4)$
(1) $1 = 21 \times 1 + (173-21\times 8) \times (-4)$
$1 = 173 \times (-4) + 21 \times 33$

On a donc : $21 \times 33 + 173 \times (-4) = 1$

puis en multipliant par -124 : $21 \times (-4092) - 173 \times (-496) = -124$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $21x - 173y = -124$:

$21x - 173y = -124$ et $21 \times (-4092) - 173 \times (-496) = -124$

donc, par soustraction : $21(x + 4092) - 173(y + 496) = 0$

donc $21(x + 4092) = -173(-496 - y)$. (*)

Or, 21 et -173 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $21 \mid -496 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-496 - y = 21k$

et alors, d'après (*): $x + 4092 = -173k$.

• Réciproquement, si $x = -4092 - 173k$ et $y = -496 - 21k$ alors :

$21x - 173y = 21(-4092 - 173k) - 173(-496 - 21k) = ...$ (à faire) $= -124$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $42x - 346y = -248$ sont les couples $(-4092 - 173k, -496 - 21k)$, où k entier relatif.

Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne -290x - 294y = 300.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 294 et 290 :

(1)	294	=	290	×	1	+	4
(2)	290	=	4	×	72	+	2
(3)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(290, 294) = 2.
En divisant par PGCD(290, 294) : -290x - 294y = 300 ⇔ -145x - 147y = 150.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 145 et 147 :

(1)	147	=	145	×	1	+	2
(2)	145	=	2	×	72	+	1
(3)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :
(2) 1 = 145 x 1 + 2 × (-72)
(1) 1 = 145 x 1 + (147-145x1) × (-72)
1 = 147 x (-72) + 145 x 73

On a donc : 145 × 73 + 147 × (-72) = 1
puis en multipliant par 150 : -145 × (-10950) - 147 × 10800 = 150.

• Si x et y sont solutions de l'équation -145x - 147y = 150 :
-145x - 147y = 150 et -145 × (-10950) - 147 × 10800 = 150
donc, par soustraction : -145(x + 10950) - 147(y - 10800) = 0
donc -145(x + 10950) = -147(10800 - y). (*)
Or, -145 et -147 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -145 | 10800 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 10800 - y = -145k
et alors, d'après (*): x + 10950 = -147k.

• Réciproquement, si x = -10950 - 147k et y = 10800 + 145k alors :
-145x - 147y = -145(-10950 - 147k) - 147(10800 + 145k) = ... (à faire) = 150.

• Conclusion : les solutions de l'équation -290x - 294y = 300 sont les couples (-10950 - 147k, 10800 + 145k), où k entier relatif.

Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne 121x - 45y = -160.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 121 et 45 :

(1)	121	=	45	×	2	+	31
(2)	45	=	31	×	1	+	14
(3)	31	=	14	×	2	+	3
(4)	14	=	3	×	4	+	2
(5)	3	=	2	×	1	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

donc PGCD(121, 45) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	3	x	1	+	2	×	(-1)
(4)	1	=	3	x	1	+	(14-3x4)	×	(-1)
	1	=	14	x	(-1)	+	3	x	5
(3)	1	=	14	x	-1	+	(31-14x2)	×	5
	1	=	31	x	5	+	14	x	(-11)
(2)	1	=	31	x	5	+	(45-31x1)	×	(-11)
	1	=	45	x	(-11)	+	31	x	16
(1)	1	=	45	x	-11	+	(121-45x2)	×	16
	1	=	121	x	16	+	45	x	(-43)

On a donc : 121 × 16 + 45 × (-43) = 1
puis en multipliant par -160 : 121 × (-2560) - 45 × (-6880) = -160.

• Si x et y sont solutions de l'équation 121x - 45y = -160 :
121x - 45y = -160 et 121 × (-2560) - 45 × (-6880) = -160
donc, par soustraction : 121(x + 2560) - 45(y + 6880) = 0
donc 121(x + 2560) = -45(-6880 - y). (*)
Or, 121 et -45 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 121 | -6880 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -6880 - y = 121k
et alors, d'après (*): x + 2560 = -45k.

• Réciproquement, si x = -2560 - 45k et y = -6880 - 121k alors :
121x - 45y = 121(-2560 - 45k) - 45(-6880 - 121k) = ... (à faire) = -160.

• Conclusion : les solutions de l'équation 121x - 45y = -160 sont les couples
(-2560 - 45k, -6880 - 121k), où k entier relatif.

Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne $-341x - 151y = -203$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 341 et 151 :

(1)	341	=	151	×	2	+	39
(2)	151	=	39	×	3	+	34
(3)	39	=	34	×	1	+	5
(4)	34	=	5	×	6	+	4
(5)	5	=	4	×	1	+	1
(6)	4	=	1	×	4	+	0

donc PGCD(341, 151) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	5	x	1	+	4	×	(-1)
(4)	1	=	5	x	1	+	(34-5x6)	×	(-1)
	1	=	34	x	(-1)	+	5	x	7
(3)	1	=	34	x	-1	+	(39-34x1)	×	7
	1	=	39	x	7	+	34	x	(-8)
(2)	1	=	39	x	7	+	(151-39x3)	×	(-8)
	1	=	151	x	(-8)	+	39	x	31
(1)	1	=	151	x	-8	+	(341-151x2)	×	31
	1	=	341	x	31	+	151	x	(-70)

On a donc : $341 \times 31 + 151 \times (-70) = 1$
puis en multipliant par -203 : $-341 \times 6293 - 151 \times (-14210) = -203$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-341x - 151y = -203$:
$-341x - 151y = -203$ et $-341 \times 6293 - 151 \times (-14210) = -203$
donc, par soustraction : $-341(x - 6293) - 151(y + 14210) = 0$
donc $-341(x - 6293) = -151(-14210 - y)$. (*)
Or, -341 et -151 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $-341 \mid -14210 - y$
donc il existe un entier relatif k tel que $-14210 - y = -341k$
et alors, d'après (*): $x - 6293 = -151k$.

• Réciproquement, si $x = 6293 - 151k$ et $y = -14210 + 341k$ alors :
$-341x - 151y = -341(6293 - 151k) - 151(-14210 + 341k) = \dots$ (à faire) $= -203$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-341x - 151y = -203$ sont les couples $(6293 - 151k, -14210 + 341k)$, où k entier relatif.

Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne -183x - 175y = 16.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 183 et 175 :

(1)	183	=	175	×	1	+	8
(2)	175	=	8	×	21	+	7
(3)	8	=	7	×	1	+	1
(4)	7	=	1	×	7	+	0

donc PGCD(183, 175) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (-2, 2).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 183 et 175) et en multipliant par 16, on aurait trouvé la solution particulière (-352, 368).

• Si x et y sont solutions de l'équation -183x - 175y = 16 :
-183x - 175y = 16 et -183 × (-2) - 175 × 2 = 16
donc, par soustraction : -183(x + 2) - 175(y - 2) = 0
donc -183(x + 2) = -175(2 - y). (*)
Or, -183 et -175 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -183 | 2 - y
donc il existe un entier relatif k tel que 2 - y = -183k
et alors, d'après (*): x + 2 = -175k.

• Réciproquement, si x = -2 - 175k et y = 2 + 183k alors :
-183x - 175y = -183(-2 - 175k) - 175(2 + 183k) = ... (à faire) = 16.

• Conclusion : les solutions de l'équation -183x - 175y = 16 sont les couples (-2 - 175k, 2 + 183k), où k entier relatif.

Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne $192x - 456y = 456$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 456 et 192 :

(1)	456	=	192	×	2	+	72
(2)	192	=	72	×	2	+	48
(3)	72	=	48	×	1	+	24
(4)	48	=	24	×	2	+	0

donc PGCD(192, 456) = 24.

En divisant par PGCD(192, 456) : $192x - 456y = 456 \Leftrightarrow 8x - 19y = 19$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est (0, -1).

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 19 et 8) et en multipliant par 19, on aurait trouvé la solution particulière (-133, -57).

• Si x et y sont solutions de l'équation $8x - 19y = 19$:

$8x - 19y = 19$ et $-19 \times (-1) = 19$

donc, par soustraction : $8x - 19(y + 1) = 0$

donc $8x = -19(-1 - y)$. (*)

Or, 8 et -19 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $8 \mid -1 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-1 - y = 8k$

et alors, d'après (*): $x = -19k$.

• Réciproquement, si $x = -19k$ et $y = -1 - 8k$ alors :

$8x - 19y = 8(19k) - 19(-1 - 8k) = \ldots$ (à faire) $= 19$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $192x - 456y = 456$ sont les couples $(-19k, -1 - 8k)$, où k entier relatif.

Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne -72x - 187y = 381.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 187 et 72 :

(1)	187	=	72	×	2	+	43
(2)	72	=	43	×	1	+	29
(3)	43	=	29	×	1	+	14
(4)	29	=	14	×	2	+	1
(5)	14	=	1	×	14	+	0

donc PGCD(72, 187) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	29	x	1	+	14	×	(-2)
(3)	1	=	29	x	1	+	(43-29x1)	×	(-2)
	1	=	43	x	(-2)	+	29	x	3
(2)	1	=	43	x	-2	+	(72-43x1)	×	3
	1	=	72	x	3	+	43	x	(-5)
(1)	1	=	72	x	3	+	(187-72x2)	×	(-5)
	1	=	187	x	(-5)	+	72	x	13

On a donc : $72 \times 13 + 187 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 381 : $-72 \times (-4953) - 187 \times 1905 = 381$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $-72x - 187y = 381$:

$-72x - 187y = 381$ et $-72 \times (-4953) - 187 \times 1905 = 381$

donc, par soustraction : $-72(x + 4953) - 187(y - 1905) = 0$

donc $-72(x + 4953) = -187(1905 - y)$. (*)

Or, -72 et -187 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $-72 \mid 1905 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $1905 - y = -72k$

et alors, d'après (*): $x + 4953 = -187k$.

• Réciproquement, si $x = -4953 - 187k$ et $y = 1905 + 72k$ alors :

$-72x - 187y = -72(-4953 - 187k) - 187(1905 + 72k) = \ldots$ (à faire) $= 381$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $-72x - 187y = 381$ sont les couples $(-4953 - 187k, 1905 + 72k)$, où k entier relatif.

Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne -303x - 198y = -243.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 303 et 198 :

(1)	303	=	198	×	1	+	105
(2)	198	=	105	×	1	+	93
(3)	105	=	93	×	1	+	12
(4)	93	=	12	×	7	+	9
(5)	12	=	9	×	1	+	3
(6)	9	=	3	×	3	+	0

donc PGCD(303, 198) = 3.

En divisant par PGCD(303, 198) : -303x - 198y = -243 ⇔ -101x - 66y = -81.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 101 et 66 :

(1)	101	=	66	×	1	+	35
(2)	66	=	35	×	1	+	31
(3)	35	=	31	×	1	+	4
(4)	31	=	4	×	7	+	3
(5)	4	=	3	×	1	+	1
(6)	3	=	1	×	3	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	4	x	1	+	3	×	(-1)
(4)	1	=	4	x	1	+	(31-4x7)	×	(-1)
	1	=	31	x	(-1)	+	4	x	8
(3)	1	=	31	x	-1	+	(35-31x1)	×	8
	1	=	35	x	8	+	31	x	(-9)
(2)	1	=	35	x	8	+	(66-35x1)	×	(-9)
	1	=	66	x	(-9)	+	35	x	17
(1)	1	=	66	x	-9	+	(101-66x1)	×	17
	1	=	101	x	17	+	66	x	(-26)

On a donc : 101 × 17 + 66 × (-26) = 1
puis en multipliant par -81 : -101 × 1377 - 66 × (-2106) = -81.

• Si x et y sont solutions de l'équation -101x - 66y = -81 :
-101x - 66y = -81 et -101 × 1377 - 66 × (-2106) = -81
donc, par soustraction : -101(x - 1377) - 66(y + 2106) = 0
donc -101(x - 1377) = -66(-2106 - y). (*)
Or, -101 et -66 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : -101 | -2106 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -2106 - y = -101k
et alors, d'après (*): x - 1377 = -66k.

• Réciproquement, si x = 1377 - 66k et y = -2106 + 101k alors :
-101x - 66y = -101(1377 - 66k) - 66(-2106 + 101k) = ... (à faire) = -81.

• Conclusion : les solutions de l'équation -303x - 198y = -243 sont les couples (1377 - 66k, -2106 + 101k), où k entier relatif.

Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne 352x + 464y = 304.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 464 et 352 :

(1)	464	=	352	×	1	+	112
(2)	352	=	112	×	3	+	16
(3)	112	=	16	×	7	+	0

donc PGCD(352, 464) = 16.

En divisant par PGCD(352, 464) : 352x + 464y = 304 ⇔ 22x + 29y = 19.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 22 et 29 :

(1)	29	=	22	×	1	+	7
(2)	22	=	7	×	3	+	1
(3)	7	=	1	×	7	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2)	1	=	22	x	1	+	7	×	(-3)
(1)	1	=	22	x	1	+	(29-22x1)	×	(-3)
	1	=	29	x	(-3)	+	22	x	4

On a donc : 22 × 4 + 29 × (-3) = 1

puis en multipliant par 19 : 22 × 76 + 29 × (-57) = 19.

• Si x et y sont solutions de l'équation 22x + 29y = 19 :

22x + 29y = 19 et 22 × 76 + 29 × (-57) = 19

donc, par soustraction : 22(x - 76) + 29(y + 57) = 0

donc 22(x - 76) = 29(-57 - y). (*)

Or, 22 et 29 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 22 | -57 - y

donc il existe un entier relatif k tel que -57 - y = 22k

et alors, d'après (*): x - 76 = 29k.

• Réciproquement, si x = 76 + 29k et y = -57 - 22k alors :

22x + 29y = 22(76 + 29k) + 29(-57 - 22k) = ... (à faire) = 19.

• Conclusion : les solutions de l'équation 352x + 464y = 304 sont les couples (76 + 29k, -57 - 22k), où k entier relatif.

Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne $460x - 186y = 346$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 460 et 186 :

(1)	460	=	186	×	2	+	88
(2)	186	=	88	×	2	+	10
(3)	88	=	10	×	8	+	8
(4)	10	=	8	×	1	+	2
(5)	8	=	2	×	4	+	0

donc PGCD(460, 186) = 2.

En divisant par PGCD(460, 186) : $460x - 186y = 346 \Leftrightarrow 230x - 93y = 173$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 230 et 93 :

(1)	230	=	93	×	2	+	44
(2)	93	=	44	×	2	+	5
(3)	44	=	5	×	8	+	4
(4)	5	=	4	×	1	+	1
(5)	4	=	1	×	4	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(4)	1	=	5	x	1	+	4	×	(-1)
(3)	1	=	5	x	1	+	(44-5x8)	×	(-1)
	1	=	44	x	(-1)	+	5	x	9
(2)	1	=	44	x	-1	+	(93-44x2)	×	9
	1	=	93	x	9	+	44	x	(-19)
(1)	1	=	93	x	9	+	(230-93x2)	×	(-19)
	1	=	230	x	(-19)	+	93	x	47

On a donc : $230 \times (-19) + 93 \times 47 = 1$

puis en multipliant par 173 : $230 \times (-3287) - 93 \times (-8131) = 173$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $230x - 93y = 173$:

$230x - 93y = 173$ et $230 \times (-3287) - 93 \times (-8131) = 173$

donc, par soustraction : $230(x + 3287) - 93(y + 8131) = 0$

donc $230(x + 3287) = -93(-8131 - y)$. (*)

Or, 230 et -93 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $230 \mid -8131 - y$

donc il existe un entier relatif k tel que $-8131 - y = 230k$

et alors, d'après (*): $x + 3287 = -93k$.

• Réciproquement, si $x = -3287 - 93k$ et $y = -8131 - 230k$ alors :

$230x - 93y = 230(-3287 - 93k) - 93(-8131 - 230k) = \ldots$ (à faire) $= 173$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $460x - 186y = 346$ sont les couples $(-3287 - 93k, -8131 - 230k)$, où k entier relatif.