T^le spé

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

*« Ce serait un puissant briseur de mythes, l'auteur qui parviendrait à défaire le lien établi entre l'adjectif "**cartésien**" et la notion de rationalité, qui nous délivrerait de l'usage habituel de "**cartésien**" comme synonyme de "méthodique" et de "logiquement cohérent". Une grave erreur historique serait ainsi effacée et, d'autre part, on verrait disparaître un tic de langage bien superflu – l'invocation du patronage **cartésien** à propos de toute démarche impliquant apparemment quelque suite dans les idées. »*

Jean-François Revel, Descartes inutile et incertain (1976)

Rappels

cours → p.120

On se placera ici dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace.

I. Représentations paramétriques

I.1 D'une droite

PROPRIÉTÉ

La droite D passant par un point $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}};y_{\mathrm{A}};z_{\mathrm{A}}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} x=x_{\mathrm{A}}+ka \\ y=y_{\mathrm{A}}+kb \\ z=z_{\mathrm{A}}+kc \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION

Le système ci-dessus est appelé ***une représentation paramétrique de la droite*** D et on dit que t est le paramètre de cette représentation.

Démonstration : $\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\vec{u}$

$\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x-x_{\mathrm{A}}=ka \\ y-y_{\mathrm{A}}=kb \\ z-z_{\mathrm{A}}=kc \end{cases}$

REMARQUE : une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

EXEMPLE A1

p. 127 SF3

On considère les points $\mathrm{A}(7;2;-3)$ et $\mathrm{B}(2;4;1)$ dans l'espace repéré.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

EXEMPLE A2

p. 127 SF4

La droite (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -4t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

a. Définir la droite (d) par un point et un vecteur directeur.

b. Les points $B(10;12;-1)$ et $C(-5;-8;3)$ appartiennent-ils à (d) ?

I.2 D'un plan *(hors programme mais parfois bien utile)*

PROPRIÉTÉ

Le plan P passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION

Le système ci-dessus est appelé ***une représentation paramétrique du plan*** P.

Démonstration : $M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow \exists\ (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \exists\ (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x - x_A = \lambda a + \mu a' \\ y - y_A = \lambda b + \mu b' \\ z - z_A = \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

REMARQUE : un plan admet une infinité de représentations paramétriques.

II. Équation cartésienne d'un plan (de l'espace)

PROPRIÉTÉS

1) Tout plan P de vecteur normal non nul $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ où } d \in \mathbb{R}.$$

Cette équation s'appelle une ***équation cartésienne*** de P.

2) Réciproquement, si $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, pour tout réel d, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstrations :

• Soit P un plan de vecteur normal non nul $\vec{n}(a;b;c)$ et passant par $A(x_A;y_A;z_A)$.

Soit $M(x;y;z) \in P$. Alors : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ d'où $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$.

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$ on a bien $ax + by + cz + d = 0$.

• Soit P l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$.

Si $a \neq 0$:

on pose $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ et $\vec{n}(a;b;c)$. Alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \left(x + \dfrac{d}{a}\right)a + yb + zc = ax + d + by + cz$

donc P est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
donc P est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Si $a=0$: alors soit $b\neq 0$ soit $c\neq 0$
et on reprend la démonstration avec $A\left(0;-\frac{d}{b};0\right)$ ou $A\left(0;0;-\frac{c}{b}\right)$.

<u>REMARQUE</u> : ***dans l'espace, une droite n'admet pas d'équation cartésienne*** ! (d'où la représentation paramétrique d'une droite). Par contre si on considère une droite comme l'intersection de deux plans, on peut dire qu'une droite admet un système de deux équations cartésiennes.

EXEMPLE A3


p. 125 SF1

Le plan P passe par le point $A(1;-2;4)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(5;3;-1)$, et le plan P' est parallèle à P et passe par le point $B(4;1;3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan P.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan P'.

EXEMPLE A4


p. 125 SF2

On considère le plan P d'équation cartésienne $3x-4y+z+2=0$.

a. Définir le plan P par un point et un vecteur normal.

b. Étudier la position relative de P avec chacun des plans P_1 et P_2 définis par :

P_1 : $2x+y-2z=0$ et P_2 : $6x+8y2z+5=0$.

EXEMPLE A5


p. 129 SF5

a. On considère la droite (d) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 20 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, ainsi que le point $A(3;5;4)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (d) .

b. On considère le plan $Q: 4x+y-2z-66=0$ et le point $B(-1;3;-2)$.

Déterminer les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point B sur le plan Q.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

- Fiche bilan → p.132
- QCM 9 questions corrigées → p.133
- Exercices corrigés → 29 à 37 p.134
- 2 exercices type Bac guidés & corrigés → 111 et 112 p.146

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
→ maths-et-tiques : tsm-rpec-ym
→ jaicompris.com : tsm-rpec-jaicompris1 et tsm-rpec-jaicompris2