

Exercice type Bac (équation diophantienne)

Exercice

D'après Bac 2011

env. 30 minutes

On se propose de déterminer l'ensemble (S) des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$n \equiv 9 [17] \text{ et } n \equiv 3 [5].$$

1. Recherche d'un élément de (S)

On désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$.

b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à (S).

c) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer un exemple d'entier n_0 appartenant à (S).

2. Caractérisation des éléments de (S)

a) Soit n un entier relatif appartenant à (S).

Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [85]$.

b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à (S) si et seulement si il peut s'écrire sous la forme :

$$n = 43 + 85k \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

3. Application

Une comète A passe tous les 17 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 9 ans.

Une comète B passe tous les 5 ans et apparaîtra la prochaine fois dans 3 ans.

Dans combien d'années pourra-t-on observer les deux comètes la même année ?