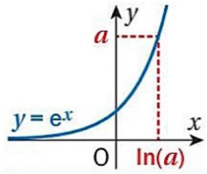
APPROCHE HISTORIQUE DE LA FONCTION LOGARITHME

Rappels de Première

Fonction exponentielle : `1434` (FB) + `1435` (5 SF) + `vers-tomc#a6` (5 exos corrigés en vidéo)

I. Fonction réciproque de la fonction exp



D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a>0$, l'équation $\mathrm{e}^x=a$ admet une unique solution réelle.

DÉFINITIONS

• On appelle ce réel ***logarithme népérien de a*** et on le note $\ln(a)$.

Si aucune confusion n'est possible, on le note parfois $\ln a$.

• On note $\ln$ la fonction qui, à tout réel $x>0$, associe le réel $\ln(x)$.

→ À RETENIR ←

$$(\mathrm{e}^x=a \text{ et } x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow (x=\ln(a) \text{ et } a\in\,]0;+\infty[\,)$$

REMARQUE : on dit que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des fonctions ***réciproques***.
Au sens de la composition de fonctions, on dit aussi parfois que $\ln$ est l'inverse de $\exp$, mais cela est confus car l'inverse de $\exp$ est plutôt compris comme $\dfrac{1}{\exp}$.

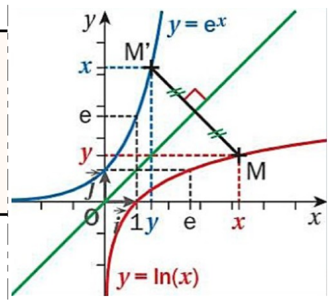
/!\

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

- $\ln 1=0$
- $\ln \mathrm{e}=1$
- $\forall x\in\mathbb{R} : \ln(\mathrm{e}^x)=x$
- $\forall x\in\,]0;+\infty[\ : \mathrm{e}^{\ln(x)}=x$

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



II. Propriétés algébriques

THÉORÈME (RELATION FONCTIONNELLE)

Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.

Démonstration :

$\mathrm{e}^{\ln(xy)}=xy=\mathrm{e}^{\ln(x)}\mathrm{e}^{\ln(y)}=\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)}$ d'où le résultat.

→ À RETENIR ←

La fonction $\ln$ transforme les produits en sommes.

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels *x* et *y* strictement positifs et pour tout entier relatif *n* :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln(x)$
- $\ln(x^n)=n\ln(x)$

Démonstrations :

- $0=\ln(1)=\ln\left(x\times\frac{1}{x}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où le résultat.
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x)=\ln(\sqrt{x}\sqrt{x})=\ln(\sqrt{x})+\ln(\sqrt{x})=2\ln(\sqrt{x})$ d'où le résultat.
- $\ln(x^n)=n\ln(x)$ est admis mais découle de la relation fonctionnelle qu'on généralise.

Exemples C1

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(4)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(24)$ **b)** $\ln(\sqrt{72})$

Remarques : puisque $\ln(x^n)=n\ln(x)$ pour $x>0$ et *n* un entier relatif, on a $x^n=\mathrm{e}^{n\ln(x)}$.
On peut donc étendre ces propriétés aux réels en définissant une puissance non entière :

DÉFINITION

Pour tout réel $x>0$, pour tout réel *y* : $x^y=\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

Ainsi, on peut donner du sens à $3^{\sqrt{2}}$, 8^{π}, $5^{\frac{7}{4}}$, etc.
Si *x* est un réel négatif, par exemple pour $(-3)^{\sqrt{2}}$, votre calculatrice vous donnera un message d'erreur ou, si le mode « complexe » est activé, un nombre complexe du type $a+\mathrm{i}b$ (enseigné en T^le^ option « mathématiques expertes »).
Pour tout réel $a>0$, on appelle ***fonction exponentielle de base a***, notée $\exp_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x)=a^x$ (ainsi, $\exp=\exp_{\mathrm{e}}$). On peut d'ailleurs montrer que ces fonctions sont les solutions continues et non nulles de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)f(y)$. Autrement dit, les fonctions $\exp_a$ sont les uniques fonctions continues et non nulles qui transforment les sommes en produits.

III. Étude de la fonction ln

III.1 Dérivée et variations

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est dérivable sur son ensemble de définition et $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration :

→ La dérivabilité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est admise, mais la courbe $C_{\ln}$ étant la symétrique de $C_{\exp}$ avec exp qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, il est intuitif que $C_{\ln}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

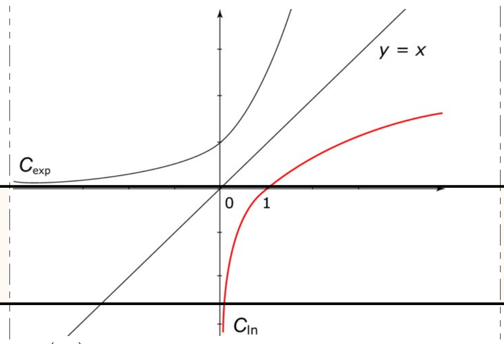
→ En admettant que ln est dérivable :

on pose $f(x)=e^{\ln(x)}$ pour tout $x>0$.

Alors $f'(x)=\ln'(x)\times\exp'(\ln(x))=\ln'(x)\times x$

mais aussi : $f(x)=x$ donc $f'(x)=1$

d'où le résultat.



PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration : pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $\ln'(x)>0$, d'où le résultat.

COROLLAIRES (IMMÉDIATS)

- $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
- $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$
- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

Exemples A1


p. 107 capacité 3

1. Résoudre les équations suivantes.

a. $2e^x-1=0$ dans $\mathbb{R}$. **b.** $4\ln(x)+16=0$ dans $]0;+\infty[$.

2. Pour tout réel $x>0$, on pose $A(x)=\ln(3x)+\ln\left(\dfrac{x}{3}\right)+\ln(e^2)$.

a. Montrer que $A(x)=2\ln(x)+2$.

b. En déduire les solutions de l'équation $A(x)=0$.

3. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $-3e^x+6<0$ dans $\mathbb{R}$. **b.** $3-\ln(x)\geqslant 0$ dans $]0;+\infty[$.

Exemples A2


p. 291 SF3

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres réels x pour lesquels l'équation $\ln(3x+1)=1$ est définie.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

EXEMPLES A3

tsm-fln-exa6789-cor

Résoudre les équations et inéquations suivantes.
a) $\ln(x)=5$ **b)** $e^{x}=3$ **c)** $\ln(1-x)\leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3}>4$.

EXEMPLE A4

tsm-fln-exa12-cor

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^{n}<10^{-3}$ où $n \in \mathbb{N}$.

III.2 Limites aux bornes

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$

EXEMPLE C2

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x-3$.
On admet que *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de *f*.

III.3 Convexité

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est concave sur son ensemble de définition.

Démonstration :

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ et $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

$\ln'$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ et $\ln''(x)=-\frac{1}{x^{2}}$. D'où $\ln''(x)<0$ et le résultat.

REMARQUE : on peut en déduire que la courbe représentative de $\ln$ est toujours en dessous de ses tangentes, et obtenir ainsi de nombreuses inégalités, comme $\ln(x)\leqslant x-1$ ou $\ln(x)\leqslant \frac{x}{e}$.

IV. Dérivée d'une fonction composée avec ln

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction composée $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

EXEMPLE C3

La fonction *f* définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(5x^{4}-2)$ est la composée de la fonction u définie par $u(x)=5x^{4}-2$, qui est strictement positive sur $[1;+\infty[$, et de la fonction $\ln$.
En déduire que *f* est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{20x^{3}}{5x^{4}-2}$.

→ En 1797, dans son Tome 1 du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, le mathématicien français Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843) écrit[1] :

> 24. Pour que l a soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur l e; la plus simple sans doute est de prendre l $e = 1$, auquel cas on tombe sur une espèce particulière de logarithmes, qui sont précisément ceux que Neper a considérés. On les a nommés depuis *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il seroit donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu un aussi grand service aux Mathématiques : on pourroit les appeller logarithmes de Néper, ou logarithmes *Népériens.*

Or, contrairement à ce que dit Lacroix, Napier n'avait pas du tout établi de tels logarithmes. Mais il semble bien que l'on doive à Lacroix l'appellation *logarithme népérien*, en hommage au mathématicien écossais John Napier (1550 – 1617), dont le nom est francisé en Neper, qui publie les premières tables logarithmiques en 1614.

→ Généralement, l'origine des logarithmes népériens est datée en 1647 : Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667) travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété d'additivité des fonctions logarithmes. Cependant, il ne fait pas le lien avec les logarithmes de Napier. C'est son disciple Alphonse Antoine de Sarasa (1617 – 1667) qui le fera en 1649. Ainsi, le logarithme népérien s'est tout d'abord appelé *logarithme hyperbolique*, en référence à l'aire sous l'hyperbole qu'il représente.
En 1748, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) parle également de *logarithme naturel* :

> 122. Comme on peut prendre à volonté la baſe a pour établir un ſyſtême de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que k devienne $= 1$. Suppoſons donc $k = 1$; la ſérie trouvée ci-deſſus (*art.* 116) deviendra $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour a cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre eſt encore exact. Les logarithmes calculés ſur cette baſe, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent repréſenter la quadrature de l'hyperbole. Au reſte, pour abréger nous déſignerons conſtamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre e, qui indiquera par conſéquent la baſe des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de $k = 1$; c'eſt-à-dire, que cette lettre e exprimera la ſomme de la ſérie $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. continuée à l'infini.

On lit souvent que l'appellation *logarithme naturel* apparaît pour la première fois en 1668 dans *Logarithmotechnia*[2] de Nicolaus Mercator[3] (1620 – 1687). Or, en lisant l'ouvrage (en latin), je n'ai vu aucune mention de ce terme…

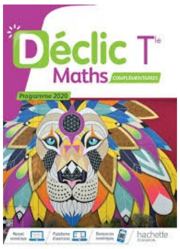
→ Cette fonction fut notée **l.** ou **l**, dès le début du XVIIIe siècle, et jusque dans la première moitié du XIXe siècle, puis **log.** ou **log** dès la fin du XVIIIe siècle, puis **Log** pour la différencier de la fonction log (logarithme de base quelconque, ou plus particulièrement logarithme décimal), ou encore **logh** (pour « logarithme hyperbolique »), avant que ne tente de s'imposer la notation préconisée par la norme AFNOR de 1961 : la notation **ln**. Avec un succès cependant très relatif : la notation **log** est encore aujourd'hui utilisée dans plusieurs branches des mathématiques (notamment en théorie des nombres), ainsi que dans plusieurs langages de programmation*.

* par exemple dans Python où, avec le module `math`, `log(x)` renvoie le logarithme népérien de x.

Sources (vérifiées) de quelques informations : Wikipédia

1 Lire en ligne (pages 36/37) : gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k92729z/f71.double.mini.
2 Lire en ligne : books.google.fr/books?id=7jMVAAAAQAAJ.
3 Aussi connu sous son nom allemand Niklaus Kauffman.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



• Fiche bilan → p.108

• QCM 12 questions corrigées → p.109