ORTHOGONALITÉ ET DISTANCES DANS L'ESPACE

« En fait d'exposition d'idées, il est un certain point de clarté au-delà duquel toute idée perd nécessairement de sa force ou de sa délicatesse. Ce point de clarté est, aux idées, ce qu'est, à certains objets, le point de ***distance*** *auquel ils doivent être regardés, pour qu'ils offrent leurs beautés attachées à cette* ***distance****. Si vous approchez trop de ces objets, vous croyez l'objet rendu plus net ; il n'est rendu que plus grossier. Un auteur va-t-il au-delà du point de clarté qui convient à ses idées, il croit les rendre plus claires ; il se trompe, il prend un sens diminué pour un sens plus net. »*

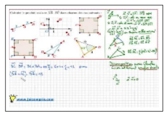
Marivaux, Pensées sur différents sujets (1719)

Rappels de Première

cours → p.90

10 exercices corrigés → p.91

tsm-ode-rap-fb
tsm-ode-rap-sf
Vidéo complète (< 19 min) :
https://youtu.be/xSHFrdby7Zg



I. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

I.1 Définition et propriétés calculatoires

Dans l'espace, on se ramène à un produit scalaire dans le plan :

$B = t_{\vec{u}}(A)$ et $C = t_{\vec{v}}(A)$

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

<u>REMARQUE</u> : au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Grassman (1809 – 1877) étudie le phénomène des marées et développe le calcul vectoriel en définissant ce qu'il appelle *produit linéaire* : « le produit algébrique d'un vecteur multiplié par la projection du second vecteur sur le premier ».
C'est William Hamilton (1805 – 1865) qui nomma le *produit scalaire* ainsi, car le résultat de deux vecteurs est un réel (scalaire vient du latin *scala* qui signifie *mesure*).

On déduit alors des propriétés du produit scalaire dans le plan celles dans l'espace :

PROPRIÉTÉS Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, pour tout réel k :

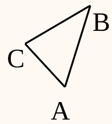
- *Commutativité / symétrie :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- *Bilinéarité :* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$

• *symétrique* : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
• *forme bilinéaire* : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et pour tout réel λ : $\vec{u}.(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$
• *définie positive* : $\vec{u}.\vec{u}\geqslant 0$ et $\vec{u}.\vec{u}=0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$

PROPRIÉTÉS Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

  Sinon : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$



- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

  et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

  et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$. *formules de polarisation*

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

  et donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

<u>REMARQUE</u> : les formules de polarisation permettent de retrouver le produit scalaire à l'aide de la norme.

I.2 Expression analytique

PROPRIÉTÉ

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ <u>un repère **orthonormé** de l'espace</u>.

Soient $\vec{u}\ (x;y;z)$ et $\vec{v}\ (x';y';z')$ deux vecteurs : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

<u>Démonstration</u> :

Écrire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en utilisant la linéarité et en observant que : $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=\|\vec{i}\|^2=1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.

I.3 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, et quatre points tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** si (AB) et (CD) sont orthogonales.

REMARQUE : par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur ($\vec{0}\cdot\vec{u}=0$).

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Démonstration :

Soient trois points A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

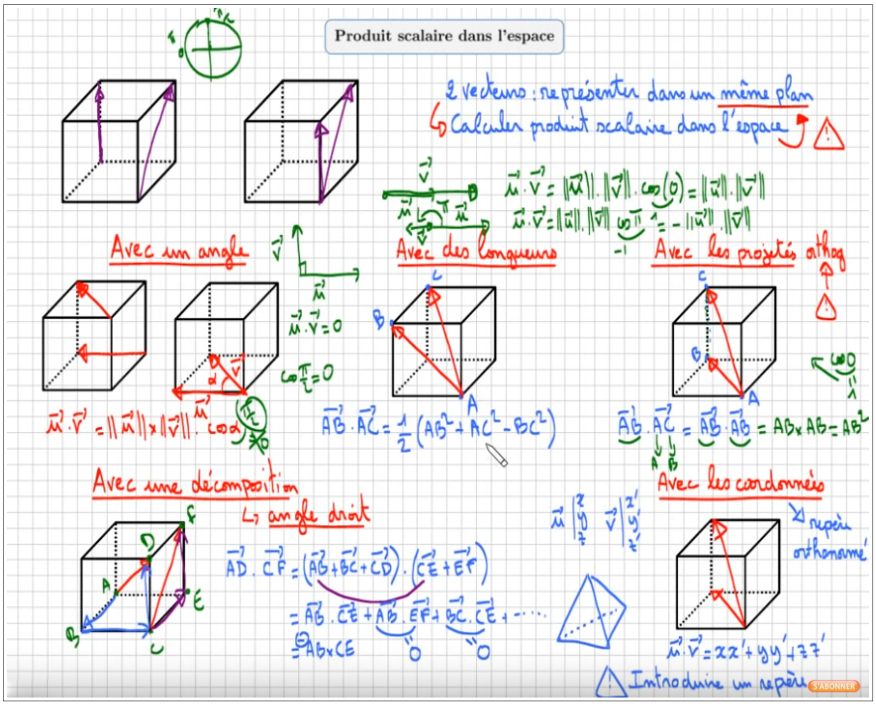
Dans un plan contenant les points A, B et C, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ (AB) et (AC) sont orthogonales

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Bilan à voir (< 17 min) :
https://youtu.be/QeOoSKyL_dw



EXEMPLE A1

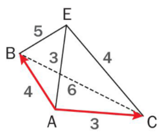
p. 95 SF1

Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

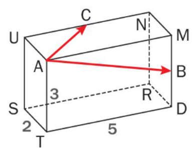
a. ABCDEFGH est un cube d'arêt 2 cm.

b. ADBGEFCH est un cube d'arêt 3 cm.

c. ABCE est un tétraèdre (l'unité est le cm) :



d. AMNUTDRS est un pavé droit, C est le milieu de [UN] et B est le milieu de [MD] (l'unité est le cm) :



II. Plans de l'espace

II.1 Orthogonalité de deux droites

DÉFINITION

Deux droites *D* et *D'* sont orthogonales dans l'espace lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

<u>Remarque</u> : il ne faut pas confondre orthogonale et perpendiculaire.
• Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
• Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et donc pas nécessairement sécantes.
• Donc « deux droites perpendiculaires sont orthogonales ».
La réciproque est fausse.
• Attention : deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles !

PROPRIÉTÉ

Soient (d) et (d') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(d) et (d') sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

<u>Démonstration</u> :

On choisit un point A de l'espace, et on note B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

D'après la propriété du I.3 : (AB) ⊥ (AC) ⇔ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

d'où le résultat.

II.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DÉFINITION

Une droite *D* est orthogonale à un plan *P* si elle est orthogonale à toutes les droites du plan *P*.

PROPRIÉTÉ

Une droite *D* est orthogonale à un plan *P* si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan *P*.

<u>Démonstration</u> : Le sens direct est évident.

Si *D* est orthogonale à deux droites D_1 et D_2 du plan *P*, en notant $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs directeurs respectifs de *D*, D_1 et D_2, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$.

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires puisque D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Soit *d* une droite du plan *P*. On note $\vec{z}$ un vecteur directeur de *d* : $\exists\,(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\vec{z}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$.

Alors : $\vec{u}\cdot\vec{z}=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})=\lambda\,\vec{u}\cdot\vec{z}+\mu\,\vec{u}\cdot\vec{w}=0$.

Donc tout droite *d* de *P* est orthogonale à D.

<u>Exemple A2</u>

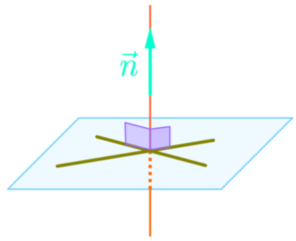
p. 97 SF2

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [CH] et J celui de [FC].

a. Montrer de deux façons différentes que (AG) et (CFH) sont orthogonaux.

b. Montrer de deux façons différentes que (AG) et (IJ) sont orthogonales.

II.3 Vecteur normal à un plan



DÉFINITION

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est dit ***normal*** à un plan P s'il est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

A est un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan (passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$).

III. Calculs de distances

Dans tout cette partie, on munit l'espace d'un repère **orthonormé**.

III.1 Distance entre deux points

PROPRIÉTÉ

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A}; z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B}; z_\mathrm{B})$ deux points de l'espace.

Alors : $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$.

Démonstration : évidente car $\mathrm{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2$.

III.2 Distance entre un point et un plan

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soit P un plan et A un point de l'espace.

Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à P.

DÉFINITION

On appelle ***projeté orthogonal*** de A sur P l'intersection de cette unique droite et de P.

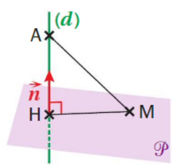
DÉFINITION

On appelle ***distance d'un point* A *à un plan*** P la plus petite longueur AM où M ∈ P.

PROPRIÉTÉ

On note H le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P : la distance de A à P est égale à AH, et $\mathrm{AH} = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ pour tout point M du plan P, où $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P.

Démonstration :



Pour tout point M du plan distinct tel que $\mathrm{M} \neq \mathrm{H}$, AHM est rectangle en H.
L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle donc : $\mathrm{AM} > \mathrm{AH}$.
La distance de A à P est donc AH.
De plus, $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|$ car H est aussi le projeté orthogonal de M sur (AH).
Donc $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = \mathrm{AH} \times \|\vec{n}\|$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. D'où le résultat.

III.3 Distance entre un point et une droite

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soient (d) une droite et A un point de l'espace.

Il existe une unique droite (d') passant par A et perpendiculaire à (d).

DÉFINITION

On appelle ***projeté orthogonal*** de A sur (d) l'intersection de cette unique droite et de (d).

DÉFINITION

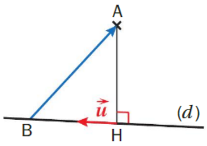
On appelle ***distance d'un point A à une droite*** (d) la plus petite longueur AM où $M \in (d)$.

PROPRIÉTÉ

On note H le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) : la distance de A à (d) est égale à AH.

Démonstration : identique à la précédente.

REMARQUE : on pourrait démontrer que cette distance est égale à $AH=\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}\right)^2}$. Voir page 100 pour une démonstration.



→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

- Fiche bilan → p.102
- QCM 10 questions corrigées → p.103
- Exercices corrigés → 34 à 44 p.104
- 2 exercices type Bac guidés & corrigés → 133 et 134 p.116

- Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
  → maths-et-tiques : tsm-ode-ym