ÉVOLUTION : MODÈLES CONTINUS

Rappels de Première

Second degré : `1428` (FB) + `1429` (5 SF) + `vers-tomc#a3` (4 exos corrigés en vidéo)

Dérivation : `1430` (FB) + `1431` (5 SF) + `vers-tomc#a4` (5 exos corrigés en vidéo)

Dérivation et sens de variation : `1432` (FB) + `1433` (2 SF) + `vers-tomc#a5` (2 exos corrigés en vidéo)

Fonction exponentielle : `1434` (FB) + `1435` (5 SF) + `vers-tomc#a6` (5 exos corrigés en vidéo)

I. Définitions

I.1 Limite en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a-r;r[$ ou $]a;a+r[$ ($r>0$).

DÉFINITIONS/NOTATIONS

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ($l \in \mathbb{R}$) : tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$: pour tout réel A, tout intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$: pour tout réel A, tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

Illustrations :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

DÉFINITION

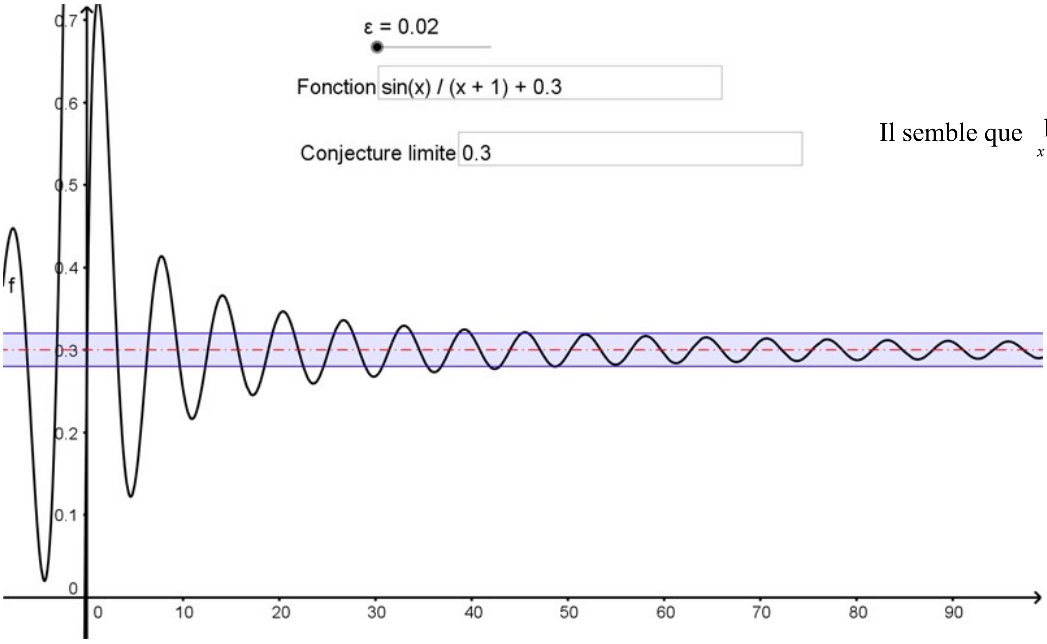
Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, on dit que la droite d'équation $x=b$ est une ***asymptote verticale*** à la courbe représentative de f.

I.2 Limite en l'infini

On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.

DÉFINITIONS/NOTATIONS

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ($l\in\mathbb{R}$) : tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:



Il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{x}{x+1}+0{,}3\right)=0{,}3$.

DÉFINITION

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, on dit que la droite d'équation $y=l$ est une ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

sauriez-vous le démontrer ? ^_^

II. Opérations sur les limites et théorèmes de comparaison

Les propriétés relatives aux opérations sur les limites et les théorèmes de comparaison pour les limites de suites restent vraies pour les fonctions.

Bien se rappeler les quatre cas d'indétermination, qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$« +\infty-\infty » \quad « \frac{\infty}{\infty} » \quad « 0\times\infty » \quad « \frac{0}{0} »$$

THÉORÈME (ADMIS)

Soient α, β, γ trois nombres réels ou +∞ ou –∞.

Si $\lim_{x\to\alpha} g(x)=\beta$ et $\lim_{x\to\beta} h(x)=\gamma$ alors $\lim_{x\to\alpha} h(g(x))=\gamma$.

Exemple C1

Soit f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}+2x}$.

Déterminer, si elle existe : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemples C2 et C3

Déterminer la limite en $+\infty$ de chaque fonction :

a. $f(x)=x^2-x+2$ **b.** $g(x)=\frac{8x^2+3x-4}{x+5}$.

III. Équation différentielle et primitive

DÉFINITION

Une ***équation différentielle*** du premier ordre est une équation qui lie une fonction inconnue y et sa dérivée y'.

III.1 Primitive d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I tout solution de l'équation différentielle $y'=f$.

THÉORÈMES (ADMIS)

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Si F et G sont deux primitives de f, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k.$$

EXEMPLE C4

Donner plusieurs primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2+3$.

Fonction f : $f(x)= \dots$	Une primitive F. $\mathrm{F}(x)= \dots$	Intervalle
k (où $k \in \mathbb{R}$)	kx	$\mathbb{R}$
x^n (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)		Si $n \geqslant 0$: $\mathbb{R}$ Si $n \leqslant -2$: $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$\dfrac{u'}{u^2}$		u ne s'annule pas sur I
$2uu'$		Si $n<0$: u ne s'annule pas sur I
$u'\mathrm{e}^u$		

EXEMPLES C5 À C7

• une primitive de $\dfrac{3}{(3x+2)^2}$ est

• une primitive de $2x\,\mathrm{e}^{x^2+4}$ est

• une primitive de $(4x+2)(x^2+x+1)$ est

Remarque : ***il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut pas trouver une formule explicite*** (qui utilise les fonctions usuelles précédemment rencontrées et les règles opératoires classiques : addition, multiplication, composition, etc.) ***pour les primitives***. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. En mathématiques (mais pas souvent en Terminale S), ces cas sont fréquents : on fait alors seulement des calculs approchés mais heureusement les moyens informatiques permettent maintenant des calculs rapides et une très bonne précision.

III.2 Équation différentielle y'=ay

PROPRIÉTÉS

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Démonstration :

EXEMPLE C8

Résoudre l'équation différentielle $3y'+4y=0$.

III.3 Équation différentielle y'=ay+b

PROPRIÉTÉS

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions :

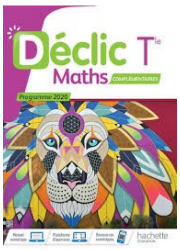
$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Démonstration :

Exemple C9

Résoudre l'équation différentielle $3y'+4y=5$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



• Fiche bilan → p.78

• QCM 11 questions corrigées → p.79

• 2 exercices corrigés → capacités 4 et 5 p.76/77